MATHEMATIK

FÜR HÖHERE TECHNISCHE LEHRANSTALTEN

Lösungen zu Band 4

bearbeitet von

Adnan IBICH, Andreas PLIHAL
und der
Verlagsredaktion Mathematik



RENIETS VERLAG



Mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur vom 13. November 2000, GZ 41.773/1-III/D/13/99, als für den Unterrichtsgebrauch an Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten und an Höheren land- und forstwirtschaftlichen Lehranstalten, Fachrichtungen Landtechnik und Forstwirtschaft, für den IV. Jahrgang im Unterrichtsgegenstand Mathematik und angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Es ist vorgesehen, dass dieses Lösungsheft zur Kontrolle und nicht zum Abschreiben verwendet wird. Demgemäß ist keine Lösung angegeben, wenn dadurch der Rechen- bzw. Gedankengang vorweg genommen wird.

Bei den im Schulbuch Nr. 100085 „SCHALK – STEINER, Mathematik für Höhere technische Lehranstalten, Band 4“ blau gekennzeichneten Aufgaben bzw. Aufgabenteilen wird der Lösungsweg vollständig dargestellt.

An der Zusammenstellung des vorliegenden Bands nach den HTL-Lehrplänen 1997 und 1998 haben Anton BURGER, Adnan IBICH und Monika WATZLAWEK von der Verlagsredaktion Mathematik der RENIETS VERLAG GmbH mitgewirkt.

Autoren und Verlag danken Klaus DEMETZ, Gerhard DIETACHMAYR, Barbara LAGGNER, Hans-Joachim LUTTER, Johanna Elisabeth MALICK-PILZ, Astrid NEUSTIFTER, Manfred RAUSCH, Martin SCHODL, Eva TURNER und Wolfram ULINSKI für die Überlassung von Aufgabenmaterial.

Einband des Schulbuchs Nr. 100085: IBM Computerkunst, Komposition von Jean-Claude HALGAND (Frankreich)

Schulbuch-Nr. 100086
ISBN 3-900648-79-4

1. Auflage 1989
3. Auflage 2001, Nachdruck 2005. Alle Drucke der 3. Auflage sind nebeneinander verwendbar.

WICHTIGER HINWEIS: Nach den Lehrplänen ab 1997 ist nur mehr die 3. Auflage zu verwenden.

Satz, Computergrafik und Druck: ERNST BECVAR GMBH, Wien

INHALTSVERZEICHNIS

1. a) 36 km **b)** Entfernung vom Ort D zum Ort B

c) Entfernung vom Ort D über den Ort C zu Ort A

2. a) gesamte in Fabrik F1 produzierte Stückzahl

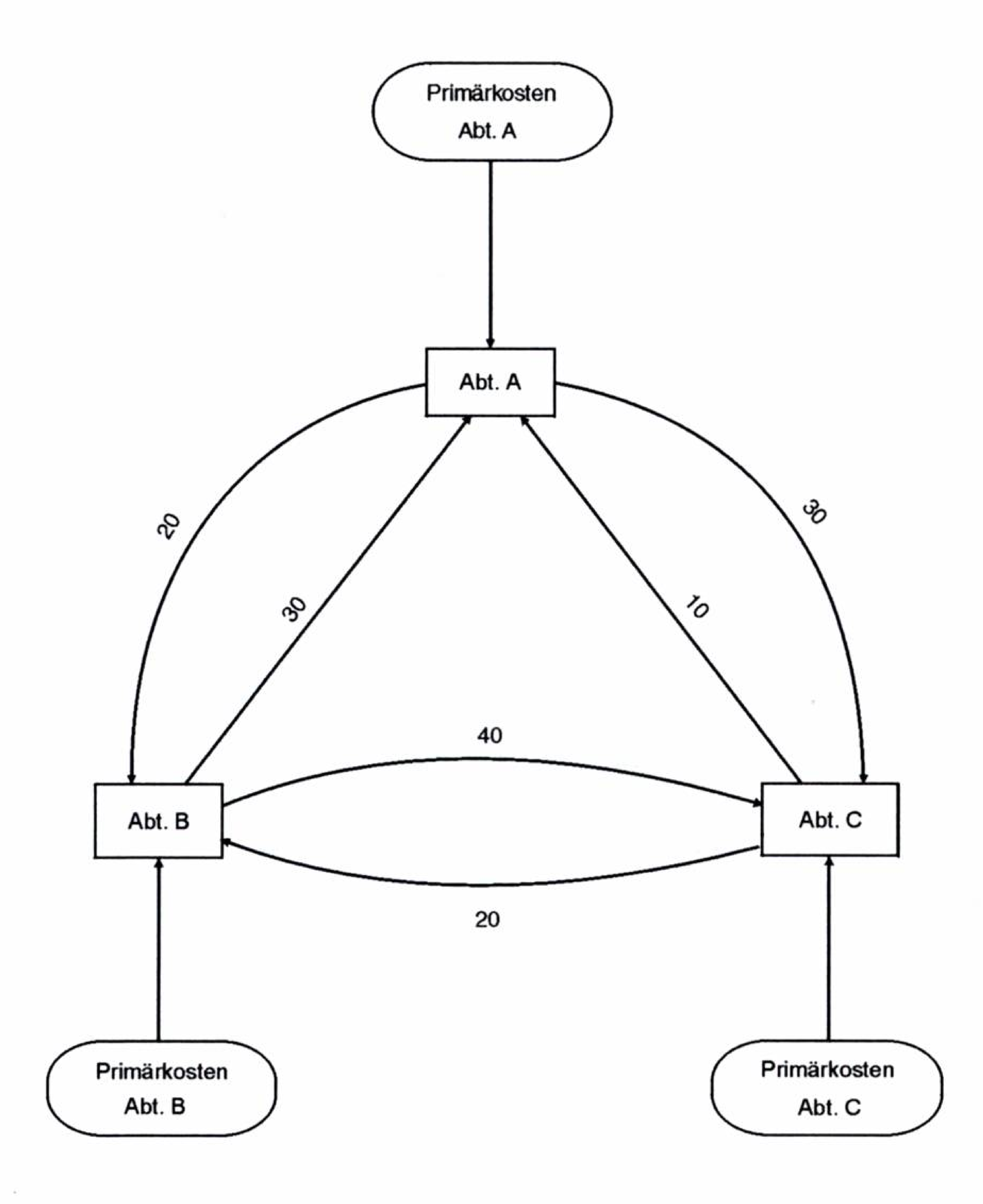
b) gesamte vom Erzeugnis E1 produzierte Stückzahl

3. a) 86 Geldeinheiten

b) 18 (größte Transportkosten je Tonne zwischen Lager und Filiale)

c) 1 (kleinste Transportkosten je Tonne zwischen Lager und Filiale)

4.



5. a) (1) und (2) bzw. (3), (4), (5) und (6) bzw. (7) und (8)

b) (4) und (5) **c)** (1) **d)** (7) und (8) **e)** (8)

f) (3) und (6) bzw. (4) und (5)

6. a) 3, 2, 7 **b)** 7, 2

7. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** 6, 9, 12, 15 **c)** 10, 14, 18 **d)** 42

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

8. a) (1) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 10 \\ 14 & 4 & 2 & 9 \\ 10 & 10 & 12 & 11 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ -2 & 8 & -6 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & -8 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (4) Summenbildung nicht möglich.

b) (1) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 10 \\ 14 & 4 & 2 & 9 \\ 10 & 10 & 12 & 11 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & -8 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -10 & -10 \\ -14 & -3 & -2 & -9 \\ -10 & -10 & -11 & -11 \\ -5 & -4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -8 & 7 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

9. Gesamtverbrauch im Teilelager 1 12 Stück, im Teilelager 2 18 Stück und im Teilelager 3 14 Stück.

Gesamtverbrauch von Artikel 1 und 2 je 15 Stück und von Artikel 3 14 Stück.

10. b) Umsatz im 1. Quartal: 35 Tische, 86 Sessel, 15 Bänke.
Umsatz im 2. Quartal: 80 Tische, 343 Sessel, 31 Bänke.
Umsatz im 3. Quartal: 28 Tische, 47 Sessel, 16 Bänke.
Umsatz im 4. Quartal: 97 Tische, 65 Sessel, 64 Bänke.

c) Umsatz im 1. Halbjahr: 115 Tische, 429 Sessel, 46 Bänke.
Umsatz im 2. Halbjahr: 125 Tische, 112 Sessel, 80 Bänke.

d) Gesamtumsatz: 240 Tische, 541 Sessel, 126 Bänke.

11. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 20 & 26 & 32 \\ 26 & 36 & 42 \\ 32 & 42 & 52 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 9 & 12 \\ 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

12. a) $\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -10 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 36 & 20 \\ 17 & 8 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

13. a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 50 & 68 & 86 \\ 62 & 90 & 108 \\ 74 & 102 & 130 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -20 & -20 & -20 \\ -40 & -20 & -20 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 45 & 54 & 63 \\ 68 & 81 & 90 \\ 91 & 104 & 117 \end{pmatrix}$

14. $s = -4$, $t = 1$

15. a) 0 **b)** −2 **c)** 0 **d)** 0

16. a) 483 Tische, 555 Sesseln, 528 Kästen

b) Filiale A: 94 480, – Euro Filiale B: 68 880, – Euro
Filiale B: 124 480,– Euro Filiale D: 346 060,– Euro

17. a) $\begin{pmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 29 & 7 & 6 \\ 12 & 6 & 18 \\ 44 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 11 & 23 & 15 \\ 29 & 59 & 36 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 8 & 13 & 18 \\ 22 & 29 & 36 \\ 6 & 12 & 18 \\ 34 & 44 & 54 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 13 & 25 & 12 \\ 16 & 28 & 9 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0{,}19 & 0{,}26 & 0{,}18 \\ 0{,}18 & 0{,}25 & 0{,}20 \end{pmatrix}$

19. a) $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 5 & 16 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ **b)** 3200 ME von A, 2600 ME von B, 3200 ME von C

20. —

21. b) $c = 1a + 3b$, $d = 2a + 4b$, $e = 5c + 7d$, $f = 6c + 8d$

22. a) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}75 \\ -0{,}125 & 0{,}625 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

b) $a_{11} + a_{21} = 1$ $a_{12} + a_{22} = 0$
$\underline{2a_{11} + 2a_{21} = 0}$ $\underline{2a_{12} + 2a_{22} = 1}$

Aus diesen Gleichungen sind keine Werte a_{11}, a_{21}, a_{12} und a_{22} bestimmbar. Daraus folgt, dass es keine zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ inverse Matrix gibt.

23. a) falsch **b)** falsch **c)** falsch **d)** wahr
e) wahr **f)** falsch **g)** falsch **h)** wahr

24. a) (1) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ 11 & -9 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

25. a) -2 **b)** $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot (-3) = -4 - 6 = \underline{-10}$

c) 69 **d)** -58

e) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 7 \end{matrix} = 5 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 7 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot 7 - 1 \cdot 0 \cdot 4 =$

$= 0 + 12 + 0 - 0 - 140 - 0 = \underline{-128}$

f) 363 **g)** $-205{,}679$ **h)** $-41{,}28$

26. a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -25 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$ **d)** g: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

27. —

28. a) g_p: $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, g_n: $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) g_p: $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \end{pmatrix}$, g_n: $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$

c) g_p: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, g_n: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) g_p: $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, g_n: $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

29. a) S(17, 35) **b)** $g \| h$ **c)** S(3, 2) **d)** S(3, 3)

e) $g = h$ **f)** S(1,75, 16,375)

30. A(2, 3), B(1, 2), C(0,86, 2,43), u = 3,14, A = 0,29,

$\alpha = 18{,}43°$, $\beta = 63{,}43°$, $\gamma = 98{,}13°$

31. a) h: $y = -3x - 1$ **b)** h: $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

32. a) $3x + y = 24$ **b)** $4x + y = 17$ **c)** $2x + y = 11$

d) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$, g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$

1. Variante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}$$
$$x = -2 + 7\lambda \cdot 10$$
$$y = 3 - 10\lambda \cdot 7$$
$$\underline{10x + 7y = 1}$$

2. Variante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = (-23)\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$\underline{10x + 7y = 1}$$

33. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix}$

34. a) S(−3, 8) **b)** $g \parallel h$ **c)** S(17, 35) **d)** $g = h$

35. a) g : $x + 5y = -8$; h : $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$g \cap h : (3 + \lambda) + 5(1 + 3\lambda) = -8$$
$$16\lambda + 8 = -8$$
$$\lambda = -1 \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{S(2, -2)}$$

b) S(5, 2) **c)** $g \| h$ **d)** S(5, 6)

36. Summe der Diagonallängen: 24,565

37. a) A(1, 0) **b)** B(1, −3) **c)** C(9, −2) **d)** C (−1, 1)

38. a) Nein. **b)** Nein. **c)** Nein.

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1 + 6\lambda,\ y = -1 + \lambda$

C(13, 1) : $y = 1 \Rightarrow 1 = -1 + \lambda \Rightarrow \lambda = 2 \quad x = 1 + 6 \cdot 2 = 13$ (w)

<u>Die Punkte A, B, C liegen auf einer Geraden.</u>

39. **a)** Nein. **b)** Ja. **c)** Ja. **d)** Nein.

40. **a)** 48,18° **b)** 0°

c) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{34}\sqrt{2}} = \frac{3-5}{2\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha = 104{,}04°$$

$\alpha' = 180° - \alpha = 75{,}964°$ $\quad \underline{\alpha' = 75{,}964°}$

d) 52,815° **e)** 74,982° **f)** 0°

41. **a)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right] = 0, \ \underline{x - 11y = 56}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = 0, \ \underline{2x - 5y = -31}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 0, \ \underline{y = 3}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = 0, \ \underline{x + 9y = 38}$

42. **a)** $16x + 10y = -27$ **b)** $2x + 5y = -3$

c) $6x + y = 0$ **d)** $y = 5{,}5$

43. $n: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad S(4{,}6, \ -3{,}2)$

44. **a)** $\dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}\right]}{\sqrt{5}} = 0$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}\right] = 0$

c) $\dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}\right]}{\sqrt{10}} = 0$ **d)** $\dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 17 \\ -13 \end{pmatrix}\right]}{\sqrt{53}} = 0$

45. **a)** 20,927 **b)** 4,67 **c)** 18,941 **d)** 9,971

46. $h_{AB} = 4{,}366, \quad h_{AD} = 8{,}05$

47. $A(7, -4), \quad B(-3, -8)$

48. $P(6, \ 2)$

49. $M_1(7, \ 6), \quad M_2(15, -2)$

50. 2 Lösungen: (1) $A_1 = 47{,}5$ (2) $A_2 = 76$

51. 2 Lösungen: (1) $B_1(3, \ 0), \ C_1(9, \ 8)$ (2) $B_2(-13, -12), \quad C_2(-7, -4)$

52. a) g: [A(1, −2), B(−1, −5)] $\Rightarrow \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right]=0 \Rightarrow g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

53. 2 Lösungen: (1) $u_1 = 41{,}082$ (2) $u_2 = 83{,}246$

54. A (−3, −2), B (4, −5), C (2, 5)

55. $h_a = 4$, $h_b = 6{,}45$, $h_c = 7{,}211$

56. B(1, −5), D(−2, 4)

57. a) S(0, 1) **b)** S(4, −3)

58. a) H(−2, 1) **b)** $H(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$

59. a) $h_a = 3{,}578$, $h_b = 3{,}578$, $h_c = 4$ **b)** $h_a = 4{,}874$, $h_b = 9{,}6$ $h_c = 4{,}8$

60. a) $|\overrightarrow{AF}_c| = 1{,}4$, $|\overrightarrow{BF}_c| = 8{,}6$ **b)** $|\overrightarrow{AF}_c| = 2{,}828$, $|\overrightarrow{BF}_c| = 4{,}243$

61. a) $F_a(-0{,}68,\ 2{,}03)$, $F_b(-4{,}5,\ 2{,}5)$, $F_c(-3{,}88,\ -2{,}53)$

b) Fußpunkt F_c

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}$$

$$g_c : \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}$$

$$h_c\colon \begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\mathbf{g_c \cap h_c}\colon \begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-9\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}=0$$

$$289\lambda = 102$$

$$\lambda = \tfrac{6}{17}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}+\tfrac{6}{17}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix}=\tfrac{1}{17}\begin{pmatrix}-12\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{F_c(-0{,}706,-0{,}176)}$$

Fußpunkt F_b:

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$$

$$g_b\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$$

$$h_b\colon \left[\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}\vec{x}-\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\mathbf{g_b \cap h_b}\colon \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}\right]=0$$

$$\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-15\\-8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}=0$$

$$85\lambda = 102$$

$$\lambda = \tfrac{6}{5}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}+\tfrac{6}{5}\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3{,}6\\7{,}8\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{F_b(-3{,}6,\ 7{,}8)}$$

Fußpunkt $\mathbf{F_a}$:

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix}$

$g_a\colon\ = \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix}$

$h_a\colon\ \begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}\right] = 0$

$\mathbf{g_a \cap h_a}\colon\ \begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}\right] = 0$

$\begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\8\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix} = 0$

$170\lambda = 187$

$\lambda = \frac{11}{10}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix} + \frac{11}{10}\begin{pmatrix}-13\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5{,}3\\6{,}1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{F_a(-5{,}3,\ 6{,}1)}$

62. a) $|\overrightarrow{BF}_a| = 4{,}92,\ |\overrightarrow{CF_a}| = 4{,}02,\ |\overrightarrow{AF}_b| = 10{,}42,$
$|\overrightarrow{CF}_b| = 2{,}74,\ |\overrightarrow{AF}_c| = 10{,}18,\ |\overrightarrow{BF}_c| = 3{,}27$

b) $|\overrightarrow{AF}_c| = 5{,}39,\ |\overrightarrow{BF}_c| = 5{,}39,\ |\overrightarrow{BF}_a| = 7{,}62,$
$|\overrightarrow{CF}_a| = 0,\ |\overrightarrow{AF}_b| = 7{,}62,\ |\overrightarrow{CF}_b| = 0$

63. a) $|\overrightarrow{AB}| = 5,\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5},\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{20},\ |\overrightarrow{AF}_c| = 4,\ |\overrightarrow{BF}_c| = 1$

b) $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{10},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2},\ |\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{2},\ |\overrightarrow{AF}_c| = 5{,}06,\ |\overrightarrow{BF}_c| = 1{,}26$

64. a) U(0,5, 6,5), r = 5,7 **b)** U(0,29, −0,57), r = 3,64

65. a) 40,74 % **b)** 32,09 %

66. a) S(0, 1), H(−4, −6,33), U(2, 1,67), e: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

b) S(1, −0,33), H(1, 1), U(1, −1), e: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

67. I(1, 2), $\rho = 6$

68. a) I(1, 3), $\rho = 4$ **b)** I(1, −0,1716), $\rho = 2$

69. a) I(0, 0,235)

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{97}$, $\overrightarrow{BC}_0 = \frac{1}{\sqrt{97}}\begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}_0 + \overrightarrow{AC}_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix} = \frac{8}{5}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BA}_0 + \overrightarrow{BC}_0 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{97}}\begin{pmatrix}-9\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-45-3\sqrt{97}\\-20-4\sqrt{97}\end{pmatrix}$

w_α: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}20+4\sqrt{97}\\-45-3\sqrt{97}\end{pmatrix}$

w_β: $(20+4\sqrt{97})x - (45+3\sqrt{97})y = -125+5\sqrt{97}$

$\mathbf{w}_\alpha \cap \mathbf{w}_\beta$:

$$(20+4\sqrt{97})(-1) - (45+3\sqrt{97})(-3+\lambda) = -125+5\sqrt{97}$$
$$-(45+3\sqrt{97})\lambda = -125+20-135+5\sqrt{97}+4\sqrt{97}-9\sqrt{97}$$
$$(45+3\sqrt{97})\lambda = 240$$
$$\lambda = \frac{80}{15+\sqrt{97}} = \frac{5(15-\sqrt{97})}{8}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \frac{5}{8}(15-\sqrt{97})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\\frac{51-5\sqrt{97}}{8}\end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>I(−1, 0,219)</u>

ρ_c: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\left[\vec{x} - \overrightarrow{0I}\right] = 0$

g_c : $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\rho_c \cap g_c$: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \overrightarrow{0I}\right] = 0$

$$-15+25\lambda+3-\frac{51-5\sqrt{97}}{2} = 0$$
$$25\lambda = \frac{75-5\sqrt{97}}{2}$$
$$\lambda = \frac{15-\sqrt{97}}{10}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} + \frac{15-\sqrt{97}}{10}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}545\\-0{,}94\end{pmatrix}$ $\qquad$ <u>P_c(0,545, −0,94)</u>

70. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4y + 3z = 19 \end{cases}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \\ -24 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 10x + 3y = 115 \\ 6y + 5z = 75 \end{cases}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ -13 \\ 24 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -41 \\ 53 \\ -95 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 53x + 41y = 2017 \\ 95y + 53z = 37 \end{cases}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -120 \\ 42 \\ 66 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 240 \\ -84 \\ -132 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 7x + 20y = 0 \\ 11y - 7z = 0 \end{cases}$

71. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $8x + 13y + z = 15$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 2 \end{pmatrix}$, $16x - 2y - 9z = -61$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ 9 \\ 86 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -13 \\ 39 \\ -65 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$, $2x - y - z = -39$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 44 \\ -23 \\ 30 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -25 \\ 30 \\ -35 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix}$, $10x + 13y + 4z = 26$

72. —

73. b) ε: $2x + y + 2z = 12$ **c)** 1

74. a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) ε: $2x - 2y - z = -1$

75. a) ε: $x + 2y + 2z = 9$ **b)** $S(3,\ 1,\ 2)$

76. a) ε_1: $x - 3y - 2z = -8$ $\quad\varepsilon_2$: $2x + y + 3z = 12$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

77. a) $S(3,\ -1,\ 5)$ **b)** ε_2: $2x+3y+3z = 18$

c) $g \in \varepsilon_2$ **d)** $S_x(9,\ 0,\ 0)$, $S_y(0,\ 6,\ 0)$, $S_z(0,\ 0,\ 6)$

78. a) $2x - 2y + z = 6$ **b)** $S(\frac{24}{5}, \frac{23}{5}, \frac{28}{5})$ **c)** 9 E **d)** 10,49 E

79. a) $A \in g$ **b)** $S(1,\ -4,\ -3)$ **c)** $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$

80. a) $A\,(-5,\ 4,\ 0)$ **b)** $A_{ABCD} = 3\sqrt{2}$ FE

81. a) $C(4,\ 5,\ 6)$ **b)** $A_{ABCD} = 8\sqrt{6}$ FE

82. a) $A(-2,\ 3,\ 5)$ **b)** $O = 197{,}62$ FE **c)** $V = 154{,}1$ VE

83. a) $O = 208{,}77$ FE **b)** $V = \frac{20\sqrt{53}}{3}$ VE

84. a) $X(9,\ 8,\ 13)$, $Y(15,\ 10,\ 7)$ **b)** $2\sqrt{19}$

85. a) $V = 36$ VE

86. a) $B(6,\ -2,\ 12)$, $D(0,\ -2,\ 18)$ **b)** $1 : \sqrt{2}$ **c)** $V = 144$ VE

87. a) $C\,(1,\ 1,\ 8)$, $D\,(3,\ -1,\ 9)$ **b)** $V = \frac{27}{4}$ VE

88. a) $\varepsilon\,(ABC)$: $2x - y + 2z = 6$, $\vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\0\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\14\\5\end{pmatrix}$

b) $H_F\,(0,\ 4,\ 5)$ **c)** $V = 567$ VE

89. a) Nein. **b)** Ja.

90. a) $A\,(3,-4)$: $r^2 = x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25 \Longrightarrow \underline{x^2 + y^2 = 25}$

b) $x^2 + y^2 = 289$

91. a)

$$
\begin{aligned}
x &= 17 - 4y \\
289 - 136y + 16y^2 + y^2 &= 34 \\
17y^2 - 136y + 255 &= 0 \\
y^2 - 8y + 15 &= 0 \\
y_{1,2} &= \tfrac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} \\
y_{1,2} &= \tfrac{8 \pm 2}{2}
\end{aligned}
$$

$\underline{y_1 = 5}$ $x_1 = 17 - 4 \cdot 5$ $\underline{x_1 = -3} \Rightarrow \underline{S_1(-3,\ 5)}$

$\underline{y_2 = 3}$ $x_2 = 17 - 4 \cdot 3$ $\underline{x_2 = 5} \Rightarrow \underline{S_2(5,\ 3)}$

b) $S_1(13{,}89,\ 34{,}30)$, $S_2(-18{,}56,\ -32{,}01)$

c) $S_1(20,\ -15)$, $S_2(-7,\ 24)$ **d)** $S_1(6,\ -5)$, $S_2(5,\ 6)$

92. $y = -x - 3$, $P_2(-4,\ 1)$

93. a) Ja. **b)** Nein.

94. a) $64x^2 + 25y^2 = 1600$ **b)** $16x^2 + 25y^2 = 400$

95. a) $e = 8$ **b)** $e = 2\sqrt{14}$ **c)** $e = \sqrt{15}$

d)

$$
\begin{aligned}
\tfrac{16}{a^2} + \tfrac{4}{\frac{100}{9}} &= 1 \\
400 + 9a^2 &= 25a^2 \\
400 &= 16a^2 \qquad e = \sqrt{25 - \tfrac{100}{9}} \\
25 &= a^2 \qquad e = \sqrt{\tfrac{125}{9}} \\
5 &= a \qquad \underline{e = \tfrac{5}{3}\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

96. a) $S_1(4,\ 6)$, $S_2(3,\ -8)$

b)

$$
\begin{aligned}
x &= 13 - 3y \\
169 - 78y + 9y^2 + 4y^2 &= 169 \\
13y^2 - 78y &= 0 \qquad |:13 \\
y(y-6) &= 0
\end{aligned}
$$

$\underline{y_1 = 0}$ $x_1 = 13 - 3 \cdot 0$ $\underline{x_1 = 13} \Rightarrow \underline{S_1(13,\ 0)}$

$\underline{y_2 = 6}$ $x_2 = 13 - 3 \cdot 6$ $\underline{x_2 = -5} \Rightarrow \underline{S_2(-5,\ 6)}$

c) $S_1(-3,\ 2)$, $S_2(4,\ -\tfrac{3}{2})$ **d)** $S_1(3,\ 8)$, $S_2(-3,\ -8)$

97. a) $A = 9\sqrt{7}$ **b)** $u = 19{,}58$

98. a) $A = 16$ **b)** $u = 16$

99. $S_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right), S_2\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},\ -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right), S_3\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},\ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right), S_4\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}},\ -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

100. $16x^2 + 25y^2 = 10\,000$

101. a) Nein. **b)** Ja.

102. a) $49x^2 - 9y^2 = 441$ **b)** $4x^2 - 9y^2 = 576$

103. a)
$$9x^2 - 16y^2 = 144 \quad |:144$$
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$
$$a^2 = 16 \quad b^2 = 9$$
$$\underline{a = 4} \quad \underline{b = 3}$$
$$e^2 = a^2 + b^2$$
$$e^2 = 16 + 9$$
$$\underline{e = 5} \Rightarrow \underline{F_1(-5,\ 0)}, \quad \underline{F_2(5,\ 0)}$$

b) $a = 15,\ b = 8,\ F_1(-17,\ 0),\ F_2(17,\ 0)$ **c)** $a = \frac{7}{4}, b = 6,\ F_1\left(-\frac{25}{4}, 0\right),\ F_2\left(\frac{25}{4}, 0\right)$

d) $a = 8{,}4,\ b = 1{,}3,\ F_1(-8{,}5,\ 0),\ F_2(8{,}5,\ 0)$

104. a) $S(6,\ 4)$ **b)** $S_1(-\frac{13}{3},\ \frac{5}{3}),\ S_2(-5,\ -3)$

c) kein Schnittpunkt

d)
$$x = y + 16$$
$$y^2 + 32y + 256 - y^2 = 64 \quad |:2$$
$$16y = -96$$
$$\underline{y = -6} \quad x = -6 + 16 \Rightarrow \underline{x = 10} \Rightarrow \underline{S(10,\ -6)}$$

105. $A = 43{,}267$

106. a)
$$\frac{49}{25} - \frac{9}{b^2} = 1$$
$$-\frac{9}{b^2} = -\frac{24}{25}$$
$$\frac{75}{8} = b^2$$
$$\frac{x^2}{25} - \frac{8y^2}{75} = 1$$
$$\underline{3x^2 - 8y^2 = 75}$$

b) $93{,}26x^2 - 6{,}74y^2 = 628{,}57$ **c)** $x^2 - 4y^2 = 16$

d) $x^2 - y^2 = 16$

107. a) $-4{,}0219$ **b)** $14{,}9987$ **c)** 0 **d)** $-1{,}4436$

e) $2{,}2924$ **f)** $0{,}5493$

108. —

109. a) Ja. **b)** Nein.

110. a) $y^2 = 10x$ **b)** $y^2 = -6x$ **c)** $x^2 = -2y$ **d)** $x^2 = 2{,}5y$

111. a) $x^2 = 12y$ **b)** $y^2 = -8x$

112. a) $y^2 = 20x$ **b)** (1) $x^2 = \frac{64}{5} \cdot y$ (2) $y^2 = -\frac{25}{8} \cdot x$ **c)** $x^2 = -68y$

113. a) $F(4,\ 0)$ **b)** $F(0,\ 1{,}5)$ **c)** $F\left(\frac{29}{4},\ 0\right)$ **d)** $F\left(0,\ \frac{67}{8}\right)$

114. a) $S_1(6,\ -12)$, $S_2\left(\frac{2}{3},\ 4\right)$ **b)** $S_1(-\frac{15129}{17},\ 246)$, $S_2(-17,\ 34)$

c) $S_1(14,\ 7)$, $S_2(-7,\ \frac{7}{4})$ **d)** $S_1(12,\ -12)$, $S_2\left(\frac{3}{4},\ 3\right)$

115. $A = 50$

116. $A = 8\sqrt{6}$

117. $S_1(1{,}51,\ 2{,}13)$, $S_2(1{,}51,\ -2{,}13)$

118. a) $s = 8\sqrt{5}$ **b)** $P(5,\ 4)$ **c)** $d = 0{,}8944$

119. 2 Lösungen: (1) $A = 32$ (2) $A = 26{,}95$

120. $u = 3(\sqrt{5} + 1)$

121. $u = \frac{37}{3}$

122. $u = 7{,}12$

123. 2 Lösungen: $Q_1\left(\frac{21}{5}, \sqrt{\frac{1489}{150}}\right)$, $Q_2\left(\frac{21}{5}, -\sqrt{\frac{1489}{150}}\right)$

124. $u = 4(\sqrt{6} + 1)$

125. $S\left(\frac{7}{3}, \sqrt{14}\right)$

126. a) falsch **b)** wahr **c)** wahr **d)** falsch **e)** falsch **f)** falsch **g)** wahr **h)** falsch

127. a) Permutation **b)** halb so **c)** $[0,\ 1]$ **d)** nicht geordneten Auswahl
e) mit Zurücklegen **f)** Wertemenge **g)** relative **h)** $1 - p$

128. a) (1) $\frac{1}{256}$ (2) $\frac{1}{6561}$ **b)** (1) $\frac{93}{256}$ (2) $\frac{577}{6561}$

129. $3{,}813 \cdot 10^{-6}$

130. **a)** $1{,}814 \cdot 10^{-4}$ **b)** $6{,}188 \cdot 10^{-2}$ **c)** $4{,}205 \cdot 10^{-1}$ **d)** $1{,}328 \cdot 10^{-1}$ **e)** 0,5

131. **a)** 0,3045 **b)** 0,5229

132. **a)** 0,2441 **b)** 0,0731

133. **a)** $9{,}317 \cdot 10^{-3}$ **b)** $6{,}37 \cdot 10^{-3}$

134. **a)** 0,1811 **b)** 0,2352

135. **a)** (1) $\frac{125}{216}$ (2) $\frac{75}{216}$ (3) $\frac{15}{216}$ (4) $\frac{1}{216}$

136. 0,7358

137. 0,2396

138. **a)** 0,4912 **b)** 0,5088 **c)** 0,0842

139. 0,7462

140. **a)** $1{,}228 \cdot 10^{-7}$ **b)** $2{,}873 \cdot 10^{-5}$ **c)** $1{,}365 \cdot 10^{-3}$ **d)** $2{,}244 \cdot 10^{-2}$ **e)** 0,1515
f) 0,4241 **g)** 0,4006

141. $2{,}383 \cdot 10^{-2}$

142. **a)** 28,5 % **b)** (1) 0,3622 (2) 0,7147

143. **a)** (1) $2{,}330 \cdot 10^{-2}$ (2) $8{,}220 \cdot 10^{-4}$ **b)** (1) $1{,}431 \cdot 10^{-2}$ (2) $3{,}331 \cdot 10^{-4}$

144. **a)** $9{,}208 \cdot 10^{-7}$ **b)** $1{,}796 \cdot 10^{-4}$ **c)** $6{,}823 \cdot 10^{-3}$ **d)** $8{,}415 \cdot 10^{-2}$
e) 0,3787 **f)** 0,5302

145. **a)**
$$\begin{aligned} P\,(35 < X < 45) &= P\,(X < 45) - P\,(X \leqslant 35) = \\ &= P\,(U < \tfrac{45-40}{8}) - P\,(U \leqslant \tfrac{35-40}{8}) = \\ &= P\,(U < 0{,}625) - P\,(U \leqslant -0{,}625) = \\ &= F\,(0{,}625) - F\,(-\,0{,}625) = F\,(0{,}625) - [1 - F\,(0{,}625)] = \\ &= 2F\,(0{,}625) - 1 \end{aligned}$$

k = 0,625 ist in der Tabelle nicht enthalten. Der Wert F (0,625) liegt zwischen F (0,62) = 0,73237 und F (0,63) = 0,73565. Der gesuchte Wert soll näherungsweise mittels linearer Interpolation bestimmt werden. Bezogen auf k = 0,62 und F (k) = 0,73237 kann man sagen:

Änderung von k um 0,01 $\Rightarrow$ Änderung von $F(k)$ um 0,00328
Änderung von k um 0,005 $\Rightarrow$ Änderung von $F(k)$ um $0{,}00164$

F (0,625) = 0,73401 P(35 < X < 45) = 2F (0,625) − 1 = $\underline{0{,}46802}$

b) $P(X < 30) = P(U < \frac{30-40}{8}) = P(U < -1{,}25) = F(-1{,}25) = 1 - F(1{,}25) =$
$= 1 - 0{,}89435 = \underline{0{,}10565}$

c) $P(X > 48) = 1 - P(X \leqslant 48) = 1 - P(U \leqslant \frac{48-40}{8}) = 1 - P(U \leqslant 1) =$
$= 1 - F(1) = 1 - 0{,}84134 = \underline{0{,}15866}$

d) $P(X > 46 \wedge X < 34) = P(X > 46) + P(X < 34) =$
$= 1 - P(X \leqslant 46) + P(X< 34) =$
$= 1 - P(U \leqslant \frac{46-40}{8}) + P(U < \frac{34-40}{8}) =$
$= 1 - P(U \leqslant 0{,}75) + P(U < -0{,}75) =$
$= 1 - F(0{,}75) + F(- 0{,}75) =$
$= 1 - F(0{,}75) + [1 - F(0{,}75)] =$
$= 2 - 2F(0{,}75) = 2 - 2 \cdot 0{,}77337 = \underline{0{,}45326}$

146. a) 0,9545 **b)** 0,00003 **c)** 0 **d)** 0,0164

147. a) 0,37733 **b)** 0,118175 **c)** 0,22663

148. a) Es gilt generell: $\frac{\Delta\mu}{\sigma} = F^{-1}(\frac{1+p}{2}) \Rightarrow \Delta\mu = \sigma{\cdot}F^{-1}(\frac{1+p}{2})$
(1) $P = 0{,}90 : \Delta\mu = 8 \cdot 1{,}6449 = 13{,}16 \Rightarrow [26{,}84,\ 53{,}16]$
(2) $P = 0{,}95 : \Delta\mu = 8 \cdot 1{,}9599 = 15{,}68 \Rightarrow [24{,}32,\ 55{,}68]$
(3) $P = 0{,}99 : \Delta\mu = 8 \cdot 2{,}5758 = 20{,}61 \Rightarrow [19{,}39,\ 60{,}61]$

b) (1) [195,89, 204,11] (2) [195,1, 204,9] (3) [193,56, 206,44]

c) (1) [297,36, 402,64] (2) [287,28, 412,72] (3) [267,58, 432,42]

149. a) Ja. **b)** 1,47

c) sehr gut: 16,85 %, gut: 26,79 %, befriedigend: 30,25 %, genügend: 18,62 %, nicht genügend: 7,49 %.

150. a) Ja. **b)** 41,68 Zoll

151. a) (1) 6,68 % (2) 0,62 % (3) 13,36 %

b) [19,97, 20,03] **c)** 14,21 %

d) (1) 0,135 % (2) 0 (3) 0,27 %

e) (1) 0,0129 (2) 0,0215 (3) 0,0116

152. a) (1) 25,14 % (2) 9,18 % (3) 42,37 %

b) [47,06, 52,94] **c)** 6,28 %

d) (1) 10,57 % (2) 0,62 % (3) 13,36 %

e) (1) 0,487 (2) 0,974 (3) 0,516

153. 0,61135

154. a) Sorte B

b) $P(A > B) = P(A - B > 0) = P(D > 0) = 1 - P(D \leqslant 0)$
$D = A - B$
$\mu_D = \mu_A - \mu_B = 1000 - 1200 = -200$
$\sigma_D = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{250^2 + 100^2} = 269{,}26$
$1 - P(D \leqslant 0) = 1 - P(U \leqslant \frac{0-(-200)}{269{,}26}) = 1 - P(U \leqslant 0{,}74) = 1 - F(0{,}74) =$
$= 1 - 0{,}77035 = 0{,}22965$ $\underline{P(A > B) = 0{,}22965}$

155. 0,5

156. a) 0,5 **b)** 0,04746

157. [9,057, 9,507]

158. a) [22,956, 24,584] **b)** [22,804, 24,736]

159. a) [51,606, 52,114] **b)** [51,588, 52,132]

160. a) [8,441, 8,519] **b)** —

161. a) 68 **b)** 136

162. a) 20 **b)** 30 **c)** 39

163. a) (1) [2,734, 2,866] (2) [2,713, 2,887]

b) Abweichung signifikant, aber nicht hochsignifikant

c) (1) 45,22 % (2) 69,50 %

164. a) (1) [2,744, + ∞[(2) [2,271, + ∞[

b) Abweichung signifikant, aber nicht hochsignifikant

c) (1) 33,72 % (2) 60,64 %

165. a) zweiseitiger Zufallsstreubereich: [19,549, 20,451]
einseitig nach unten abgegrenzter Zufallsstreubereich: [19,592, + ∞[

166. a) [95,565, 104,435] **b)** Ja.

167. a) (1) [3,528, 3,672] (2) [3,505, 3,695] **b)** hochsignifikante Abweichung

168. Nein.

169. a) (1) 0,82 (2) 0,98 (3) $\frac{5}{6}$ (4) 0,18

b) $P(X = 0) = 0{,}9127$, $P(X = 1) = 8,468 \cdot 10^{-2}$, $P(X = 2) = 2,619 \cdot 10^{-3}$,
$P(X = 3) = 2,7 \cdot 10^{-5}$, $E(X) = 0{,}09$, $\sigma^2 = 0{,}0873$

c) 91,4% bzw. 81,8%

170. a) 12 % **b)** 77,6 %

171. a) $\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{625}{1296}$ **c)** $\frac{671}{1296}$

172. a) 0,5086 **b)** 0, 4914

173. a) (1) 0,1216 (2) 0,2852 **b)** 5 **c)** 0, 2

174. a) 0, 8627 **b)** 0, 5055

175. **a)** $1,728 \cdot 10^{-4}$ **b)** $0,1934$

176. **a)** $0,1074$ **b)** $6,369 \cdot 10^{-3}$

177. **a)** $0,0918$ **b)** 30,85 % **c)** 9,49 %

178. **a)** 15,27 % **b)** $\pm 0,576\,\text{cm}$

179. **a)** 74,71 % **b)** 8,7 % **c)** 254 Stück

180. **a)** 11,5 % **b)** 2,08 Liter **c)** 21,2 % **d)** 0,0243

181. **a)** 0,0475 **b)** 21,1 % **c)** $\pm 0,20\,\text{cm}$

182. **a)** $\mu = 51,67\,\text{cm}$, $\sigma = 9,29\,\text{cm}$ **b)** 57,12 %

183. **a)** $\mu_A = 1{,}495$ mm, $\sigma_A = 0{,}03742$ mm $\mu_B = 1{,}50875$ mm, $\sigma_B = 0{,}041212$ mm

b) (A) 18,54 % (exakter), (B) 23,54 %

184. **a)** 50 % **b)** 10,96 % **c)** 22,01 %

185. **a)** 27,425 % **b)** 5,48 %

186. **a)** 2,41 % **b)** $\approx \pm 0,04\,\text{mm}$

187. **a)** 9,14 %

b) P(x = 0) = 0,9025, P(x = 1) = 0,095, P(x = 2) = 0,0025, E(x) = 0,1

c) 5,93 W

188. **a)** zwischen 36,2 % und 55,8 % **b)** 57,63 % **c)** zwischen 48,3 % und 67,7 %

189. **a)** [1499,663, 1500,337], [1499,717, + ∞] **b)** Nein.

190. **a)** [2,076, 2,124] **b)** Nein.

191. **a)** wahr **b)** falsch **c)** falsch **d)** wahr **e)** wahr **f)** wahr **g)** wahr **h)** falsch

192. 1 oder -1

193. **a)** $y = 0,7x + 0,7$ **b)** $y = 0,971x - 0,114$

194. **a)** (1) $y = 0,654x + 0,769$ (2) $y = 0,794x + 0,559$ (3) $5,275°$

b) (1) $y = 0,457x + 23,629$ (2) $y = 0,5x + 23,1225$ (3) $1,998°$

c) (1) $y = -0,478x - 0,104$ (2) $y = -0,531x - 0,094$ (3) $2,450°$

d) (1) $y = 0,891x + 7,838$ (2) $y = 1,001x + 5,176$ (3) $3,327°$

195. **a)** $r = 0,957$ **b)** $r = -0,852$ **c)** $r = -0,951$ **d)** $r = 0,872$

196. a) (1) $y = 4,316x - 1,544$ (2) $y = 4,46x - 1,78$ **b)** $r = 0,984$

c) 2,19 Millionen Euro **d)** 9,246 Milliarden Euro

197. c) $r = -0,726$

198. a) $y = 9{,}206x + 90,962$ **b)** $r = 0,955$

199. $y = 1,24x + 133,2$

200. $r = 0,90$

201. a) $y = 118433,96x + 2884694,7$ (1989: $x = 0$)

b) $y = 1191,4881x^2 + 111285,04x + 2890652,1$ (1989: $x = 0$)

c) quadratische Funktion **d)** 3728030 PKW

202. a) $y = 67982,196x + 901246,52$ (1970: $x = 0$)

b) $y = 3310,2474x^2 - 18288,552x + 1198748,1$ (1970: $x = 0$)

c) quadratische Funktion **d)** 2960973 t

203. a) $y = -2x + 9$ **b)** $0{,}91\dot{6}$ FE **c)** $2{,}4\dot{3}\pi$ VE

204. a) $S_1(-1, 2)$, $S_2(2, 0{,}5)$, $S_3(5, 8)$,

f(x): $N_{1,2}$ $(1, 0) = T$, kein Wendepunkt,

g(x): N_1 $(-1{,}249, 0)$, N_2 $(2{,}146, 0)$, N_3 $(4{,}103, 0)$

b) 20,25 FE

205. a) $N_1(-\sqrt{30}, 0)$, $N_2(0, 0) = W_1$, $N_3(\sqrt{30}, 0)$, $H(3\sqrt{2}, 4{,}582)$, $T(-3\sqrt{2}, -4{,}582)$,

$W_2(-3, -2{,}835)$, $W_3(3, 2{,}835)$, $k_{W1} = 0$, $k_{W2} = k_{W3} = 2{,}025$

b) $38{,}412\pi$ VE, 22,5 FE

206. a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

b) $N_1(-3, 0)$, $N_{2,3}(3, 0) = T$, $H(-1, 32)$, $W(1, 16)$, t_W: $y = -12x + 28$

c) 108 FE **d)** —

207. a) $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$

b) $N_1(-2, 0)$, $N_{2,3}(4, 0) = T$, $H(0, 4)$, $W(2, 2)$, t_W: $y = -\frac{3}{2}x + 5$

c) $7\frac{5}{6}$ FE

208. **a)** $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $N_{1,2}(1,\ 0) = H$, $N_3(4,\ 0)$, $T(3,\ -4)$, $W(2,\ -2)$,
$t_W:\ y = -3x + 4$

b) $20{,}93\pi$ VE

209. **a)** $y = x^3 - 3x + 2$

b) $N_1(-2,\ 0)$, $N_{2,3}(1,\ 0) = T$, $H(-1,\ 4)$, $W(0,\ 2)$, t_W: $y = -3x + 2$

c) 6,75 FE

d) $20{,}829\pi$ VE

210. f(x): $y = -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}$, $N_{1,2}\ (-1,\ 0) = T$, $N_3\ (2,\ 0)$, $H(1,\ \frac{4}{3})$, $W(0,\ \frac{2}{3})$,

t_W: $y = x + \frac{2}{3}$

g(x): $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}$, $N_1(-2,\ 0)$, $N_2(2, 0)$, $H(0,\ \frac{2}{3})$, kein Wendepunkt,

1,62674 FE

211. **a)** $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x - 4$, $N_{1,2}(-2,\ 0) = H$, $N_2(4,\ 0)$, $T(2, -8)$, $W(0,\ -4)$,

t_W: $y = -3x - 4$, $A_1 = 27$ FE

b) $y = x^2 - 2x - 8$, $N_1(-2,\ 0)$, $N_2(4,\ 0)$, $T(1,\ -9)$, $A_2 = 36$ FE

c) $A_1 : A_2 = 3 : 4$

d) $12\frac{1}{3}$ FE

212. **a)** $y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

b) $N_1(-2\sqrt{5},\ 0)$, $N_2(-2,\ 0) = W_1$, $N_3\ (2,0) = W_2$, $N_4(2\sqrt{5},\ 0)$, $H\ (0,\ 5)$,

$T_1(-2\sqrt{3},\ -4)$, $T_2(2\sqrt{3},\ -4)$, t_{W1}: $y = 4x + 8$, t_{W2}: $y = -4x + 8$

c) 3,2 FE

d) 109,787 VE

213. **a)** $y = x^4 - 6x^2 + 5$

b) $y = -4x^2 + 4$

c) ad **a)** $N_1(-\sqrt{5},\ 0)$, $N_2(-1,\ 0) = W_1$, $N_3(1,\ 0) = W_2$, $N_4(\sqrt{5},\ 0)$, $H(0,\ 5)$,

$T_1(-\sqrt{3},\ -4)$, $T_2(\sqrt{3},\ -4)$

ad **b)** $N_1(-1,\ 0)$, $N_2(1,\ 0)$, $H(0,\ 4)$, kein Wendepunkt

d) $\frac{512}{63}\pi$ VE

214. **a)** $N\ (0,\ 0) = W_1$, $H(\sqrt{2},\ 2{,}652)$, $T(-\sqrt{2},\ -2{,}652)$, $W_2(-\sqrt{6},\ -2{,}041)$,

$W_3(\sqrt{6},\ 2{,}041)$, $k_{W1} = 3{,}\dot{3}$, $k_{W2} = k_{W3} = -0{,}8\dot{3}$

b) 9,8 FE

215. a) $y = \frac{x^3-x^2+2}{x^2-2}$ **b)** 0,806 FE **c)** —

216. a) keine Nullstellen im Intervall, $H(\pi,\ 5)$, $W_1(0,\ 2)$, $W_2(2\pi,\ 2)$

b) 22,53 FE **c)** 301,86 VE **d)** $7\pi^2$ VE, 48:11

217. a) $N_1(-2{,}528, 0)$, $N_2\ (2{,}528, 0)$

b) $T(0,\ -2)$, $W_1(-1,\ -1{,}307)$, $W_2(1,\ -1{,}307)$, $t_{W1} : y = -x - 2{,}307$

$t_{W2} : y = x - 2{,}307$

c) — **d)** 10,22 E **e)** 50,5342 VE

218. a) $T(2 \cdot \ln 2,\ 4 \cdot \ln 2 + 2)$, $t : y = 3x - 2 \cdot \ln 2 + 2$

b) 3,92 FE **c)** 0,5984 VE **d)** $H(1, \frac{1}{e})$

219. a) $y = (2 - x)e^x$

b) $N(2, 0)$, $H(1, e)$, $W(0, 2)$, $t_W : y = x + 2$

c) 4,39 FE

220. a) $y = (x^2 - 4)e^{-\frac{x}{2}}$

b) $N_1(-2, 0)$, $N_2\ (2, 0)$, $H\ (4{,}83, 173)$, $T\ (-0{,}83, -5{,}01)$, $W_1\ (7{,}46,\ 1{,}24)$,

$W_2(0{,}54,\ -2{,}83)$, t_{W1}: $-0{,}26x + 3{,}18$, t_{W2}: $2{,}24x - 4{,}01$

c) 11,05 FE

221. a) $D = [-2,\ 2]$

b) $E_1\ (\sqrt{2},\ 2)$, $E_2\ (-\sqrt{2},\ 2)$, $E_3\ (-\sqrt{2},\ -2)$, $E_4\ (\sqrt{2},\ -2)$

c) $2\frac{2}{3}$ FE

222. a) $y = \frac{x^4}{16} - \frac{3x^2}{2} + 5$

b) $N_1\ (-2\sqrt{5},\ 0)$, $N_2\ (-2,\ 0) = W_1$, $N_3\ (2,\ 0) = W_2$, $N_4\ (2\sqrt{5},\ 0)$, $H(0, 5)$,

$T_1(-2\sqrt{3},\ -4)$, $T_2(2\sqrt{3},\ -4)$, t_{W1}: $y = 4x + 8$, t_{W2}: $y = -4x + 8$

c) 158,3 VE

223. a) $a = 3\,dm$, $h = 1{,}5\,dm$, $O_{min} = 27\,dm^2$ **b)** $a = 2\,dm$, $h = 1\,dm$, $V_{max} = 4\ l$

224. a) $r = h = 1{,}46\,dm$, $V_{max} = 9{,}71\ l$ **b)** $r = h = 1{,}68\,dm$, $O_{min} = 26{,}72\,dm^2$

225. $9r^2h$

226. $24\,m,\ \ 22,7°$

227. $7{,}02\,m$

228. $V(\varepsilon) = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \cos\varepsilon\,(\sin^2\varepsilon + \sin\varepsilon + 1),\ \ V = 1,65r^3$

229. **a)** $P_{max} = C \cdot v_1^3 \cdot \frac{32}{27},\ \ \frac{v_1}{v_2} = 3$ **b)** 59 %

230. **a)** ∞

b) $x = 8t - 7\sin t \Rightarrow \dot{x} = 8 - 7\cos t$

$y = 8 - 7\cos t \Rightarrow \dot{y} = 7\sin t$

$\Rightarrow y' = \frac{7\sin t}{8-7\cos t} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{7}) = \frac{7\sin\frac{\pi}{7}}{8-7\cos\frac{\pi}{7}} = \underline{1,794}$

231. **a)** $-\frac{7\sqrt{3}}{9}$ **b)** 0

232. **a)** $y = -0,667x + 2,89$ **b)** $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi^2}{8}$

233. **a)** $y = 0,189x - 0,275$ **b)** $y = 2ex + 5$

234. **a)** 10,79 FE **b)** 2,27 FE

235. **a)** 4,61 FE **b)** 75,40 FE

236. **a)** 90,70 FE **b)** 35,25 FE

237. **a)** 7,36 FE **b)** 235,62 FE

238. **a)** — **b)** $(\ell\cos\phi,\ \ell\sin\phi - ut)$ mit $\phi = \arctan\frac{ut}{c}$

c) $(-10{,}7,\ 11{,}5)\,\frac{cm}{s},\ \ (-21{,}5,\ -64{,}4)\,\frac{cm}{s^2},\ \ 15,7\,\frac{cm}{s},\ 67,8\,\frac{cm}{s^2}$

239. **a)** $q = ((r_0 + v_r t)\cos\omega_0 t,\ \ (r_0 + v_r t)\sin\omega_0 t,\ \ z_0 + v_z t)$

$v = (v_r\cos\omega_0 t - (r_0 + v_r t)\omega_0\sin\omega_0 t,\ \ v_r\sin\omega_0 t + (r_0 + v_r t)\omega_0\cos\omega_0 t,\ \ v_z)$

$a = (-2\omega_0 v_r\sin\omega_0 t + \omega_0^2(r_0 + v_r t)\cos\omega_0 t,\ \ 2\omega_0 v_r\cos\omega_0 t - \omega_0^2(r_0 + v_r t)\sin\omega_0 t,\ \ 0)$

b) für $t = 1s$: $(0{,}81,\ 1{,}26,\ 1{,}9)\,m,\ \ (-0{,}992,\ 1{,}23,\ 0,4)\,\frac{m}{s},\ \ (-0{,}03,\ -0{,}723,\ 0)\,\frac{m}{s^2}$

für $t = 4s$: $(-1{,}96,\ -2{,}27,\ 3{,}1)\,m,\ \ (1{,}94, -2{,}34,\ 0{,}4)\,\frac{m}{s},\ \ (-1{,}2,\ 1{,}617,\ 0)\,\frac{m}{s^2}$

240. **a)** $a_0,\ \frac{\pi}{20}$ **b)** $\frac{2a_0t_1}{\pi}\sin\frac{\pi T}{2t_1},\ 19,1\,\frac{m}{s}$ **c)** $\frac{4a_0t_1^2}{\pi^2}\left(1 - \cos\frac{\pi T}{2t_1}\right),\ 121{,}6\,m$

241. **a)** $a(t) = a_0\sin\frac{2\pi ut}{\ell},\ \ v(t) = \frac{a_0\ell}{2\pi u}\left(1 - \cos\frac{2\pi ut}{\ell}\right),$

$s(t) = \frac{a_0\ell}{2\pi u}\left(t - \frac{1}{2\pi u}\sin\frac{2\pi ut}{\ell}\right),\ \ s(x) = \frac{a_0\ell^2}{2\pi u^2}\left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{\ell}\right)$

b) $x_a = \frac{1}{4},\ \ 50{,}3\ \frac{cm}{s^2},\ \ x_v = \frac{1}{2},\ \ 8\ \frac{cm}{s}$

242. a) $120°$

c) $\begin{cases} x = \mathrm{e}\cos\alpha + \mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{3} \\ y = \mathrm{e}\sin\alpha + \mathrm{R}\sin\frac{\alpha}{3} \end{cases}$

d) $\mathrm{v_x} = -\omega\left(\mathrm{e}\sin\omega\mathrm{t} + \frac{\mathrm{R}}{3}\sin\omega_\mathrm{R}\mathrm{t}\right)$, $\mathrm{v_y} = \omega\left(\mathrm{e}\cos\omega\mathrm{t} + \frac{\mathrm{R}}{3}\cos\omega_\mathrm{R}\mathrm{t}\right)$,

$\mathrm{v} = 3125\sqrt{34 + 30\cos\frac{1250\mathrm{t}}{3}}\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$

243. —

244. —

245. —

246. a) $\frac{1}{17\sqrt{17}}$ **b)** 14 **d)** $\frac{12}{37\sqrt{37}}$

c) $\mathrm{y}' = -\frac{4}{\mathrm{x}^2} \Rightarrow \mathrm{y}'' = \frac{8}{\mathrm{x}^3}$

$1 + \mathrm{y}'^2 = 1 + \left(-\frac{4}{\mathrm{x}^2}\right)^2 = 1 + \frac{16}{\mathrm{x}^4} = \frac{\mathrm{x}^4+16}{\mathrm{x}^4}$

$\kappa = \frac{\mathrm{y}''}{(1+\mathrm{y}'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{8}{\mathrm{x}^3}}{\left(\frac{\mathrm{x}^4+16}{\mathrm{x}^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{8}{\mathrm{x}^3}}{\frac{(\mathrm{x}^4+16)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{x}^6}} = \frac{8\mathrm{x}^3}{(\mathrm{x}^4+16)^{\frac{3}{2}}}$

$\kappa(8) = \frac{8\cdot 8^3}{(8^4+16)^{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{\frac{64}{257\sqrt{257}}}}$

247. a) $\frac{-2}{13\sqrt{13}}$

b) Die Krümmung an der Stelle $x = 1$ ist nicht definiert.

c) $\frac{1}{13\sqrt{26}}$ **d)** $\frac{218}{63505\sqrt{63505}}$

248. a) -4 **b)** -4 **c)** $\frac{72}{125\sqrt{3}}$ **d)** $-\frac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}^6+4)\sqrt{\mathrm{e}^6+4}}$

249. a) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **b)** 2

c) $\mathrm{y}' = \ln\mathrm{x} + 1 \Rightarrow \mathrm{y}'' = \frac{1}{\mathrm{x}}$

$1 + \mathrm{y}'^2 = 1 + (1 + \ln\mathrm{x})^2 = 2 + 2\ln\mathrm{x} + (\ln\mathrm{x})^2$

$\kappa = \frac{\mathrm{y}''}{(1+\mathrm{y}'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{x}}}{(2+2\ln\mathrm{x}+(\ln\mathrm{x})^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \kappa(1) = \frac{1}{(2+0+0)^{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$

250. a) $-\frac{1}{8}$ **b)** $-\frac{1}{5\sqrt{10}}$ **c)** 2,03

251. $\kappa = \frac{1}{3\mathrm{a}\cos\mathrm{t}\sin\mathrm{t}}$

252. a) $\mathrm{k}\left(0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ **b)** $\mathrm{k}\left(-4, -\frac{1}{3}, \frac{5\sqrt{10}}{3}\right)$ **c)** $\mathrm{k}\left(3, -\frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{5}}{4}\right)$

d) $\mathrm{k}(-1{,}012\cdot 10^{13}, 2{,}405\cdot 10^{6}, 1{,}012\cdot 10^{13})$

253. **a)** $k\left(-1,118,\ 1,407,\ \frac{5}{4}\sqrt{\frac{10}{3}}\right)$ **b)** $k\left(\frac{5\sqrt[3]{2}}{3},\ \frac{7\sqrt[3]{2}}{6},\ \frac{2\sqrt[6]{32}}{3}\right)$

c) $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x \Rightarrow y'' = 2\cos 2x$

$1 + y'^2 = 1 + (\sin 2x)^2$

$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\cos 2x}{(1+\sin^2 2x)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{(1+\sin^2 2x)^{\frac{3}{2}}}{|2\cos 2x|}$

$x_m = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) = x - \frac{\sin 2x}{2\cos 2x}(1 + \sin^2 2x)$

$y_m = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = y + \frac{1}{2\cos 2x}(1 + \sin^2 2x)$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(1+\sin^2 2\cdot\frac{\pi}{4})^{\frac{3}{2}}}{|2\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}|} = \frac{1+1}{0} = \infty$

$x_m = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{2\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}}(1 + \sin^2 2\cdot\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{0}(1+1) = -\infty$

$y_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}}(1 + \sin^2 2\cdot\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{0}(1+1) = \infty$

$\Rightarrow \underline{k(-\infty,\ \infty,\ \infty)}$

d) $k\left(4\pi,\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

254. —

255. —

256. **a)** $k\left(a\sqrt{2},\ a\sqrt{2},\ \frac{3a}{2}\right)$

b) $\begin{cases} \dot{x} = -3a\sin t\cos^2 t \\ \dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -3a\cos^3 t + 6a\sin^2 t\cos t \\ \ddot{y} = -3a\sin^3 t + 6a\sin t\cos^2 t \end{cases}$

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\sin t\cos^2 t} = -\tan t$

$y'' = \frac{1}{\dot{x}^3}(\dot{x}\ddot{y} = \ddot{x}\dot{y}) = \frac{1}{-27a^3\sin^3 t\cos^6 t}\left[(-3a\sin t\cos^2 t)(-3a\sin^3 t + 6a\sin t\cos^2 t) - \right.$

$\left. -(-3a\cos^3 t + 6a\sin^2 t\cos t)(3a\sin^2 t\cos t)\right]$

$= \cdots = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$

$1 + y'^2 = 1 + (-\tan t)^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3a\sin t\cos t} \Rightarrow \rho = \frac{1}{|\kappa|} = |3a\sin t\cos t|$

$x_m = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) = a\cos^3 t - \frac{-\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = a\cos^3 t + 3a\sin^2 t\cos t$

$= a\cos t(\cos^2 t + 3\sin^2 t)$

$y_m = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = a\sin^3 t + 3a\sin t\cos^2 t = a\sin t(\sin^2 t + 3\cos^2 t)$

$\rho\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \underline{1{,}061a}$ $x_m\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \underline{1{,}036a}$ $y_m\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \underline{1{,}194a}$

$\Rightarrow \underline{k(1{,}036a,\ \ 1{,}194a,\ \ 1{,}061a)}$

257. a) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x$

$$\kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$\frac{d\kappa}{dx} = \frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\cdot 2e^{2x}\cdot e^x(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{(1+e^{2x})^3} = \cdots = \frac{e^x - 2e^{3x}}{(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d\kappa}{dx} = 0 \Rightarrow e^x - 2e^{3x} = 0 \Rightarrow e^x = 2e^{3x} \quad |\ \ln(\ )$$

$$x = \ln 2e^{3x}$$

$$x = \ln 2 + 3x\ln e$$

$$x = \ln 2 + 3x$$

$$\underline{x = -\frac{\ln 2}{2}}$$

$$\frac{d^2\kappa}{dx^2} = \frac{(e^x - 6e^{3x})(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{2}\cdot 2e^{2x}(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}(e^x - 2e^{3x})}{(1+e^{2x})^5}$$

$$\frac{d^2\kappa}{dx^2}\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} < 0 \qquad \text{Maximum}$$

$$x_m = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) = x - \frac{e^x}{e^x}(1+e^{2x}) = x - 1 - e^{2x}$$

$$x_m\left(-\frac{\ln 2}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{2} - 1 - e^{-\ln 2} = \underline{-\frac{\ln 2 + 3}{2}}$$

$$x = -\frac{\ln 2}{2} \Rightarrow y = e^{-\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y_m = y + \frac{1}{y''}(1+y'^2) = y + \frac{1}{e^x}(1+e^{2x})$$

$$y_m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \underline{2\sqrt{2}}$$

$$\kappa_{max} = \frac{e^{-\frac{\ln 2}{2}}}{(1+e^{-\ln 2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3{,}2}} = \underline{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

$$\rho_{min} = \frac{1}{|\kappa_{max}|} = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

b) Stellen maximaler Krümmung $|\kappa|$: $x = k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\kappa_{max} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{4\sqrt{3}}{27} \end{cases}, \qquad \rho_{min} = \begin{cases} 1 \\ \frac{27}{4\sqrt{3}} \end{cases}$$

c) $\kappa(0{,}51549) = 2{,}077$, $\rho_{min} = 0,481$

d) $\kappa(0{,}5848) = 0{,}84969$, $\rho_{min} = 1,176$

258. a) $\eta = \frac{1}{4} + 6\left(\frac{\xi}{16}\right)^{\frac{2}{3}}$

b) $\eta = \frac{3}{2} + \left(\frac{9\xi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$

c) $y = 5x^3 \Rightarrow y' = 15x^2 \Rightarrow y'' = 30x$

$$1 + y'^2 = 1 + 225x^4$$

$$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) = x - \frac{15x^2}{30x}(1+225x^4) = \frac{x}{2} - \frac{225x^5}{2} = \underline{\frac{x - 225x^5}{2}}$$

$$\eta = y + \frac{1}{y''}(1+y'^2) = 5x^3 + \frac{1+225x^4}{30x} = \underline{\frac{375x^4+1}{30x}}$$

$$\underline{f(x):\ x \to \begin{cases} \xi = \frac{x-225x^5}{2} \\ \eta = \frac{375x^4+1}{30x} \end{cases}}$$

d) $f(x):\ x \to \begin{cases} \xi = \frac{x}{2} - \frac{9x^5}{32} \\ \eta = -\frac{5x^3}{8} - \frac{2}{3x} \end{cases}$

259. a) $f(x):\ x \to \begin{cases} \xi = \frac{3x}{2} + \frac{2}{x^3} \\ \eta = \frac{3}{x} + \frac{x^3}{4} \end{cases}$

b) $f(x):\ x \to \begin{cases} \xi = \frac{3x}{2} + \frac{1}{18x^3} \\ \eta = -\frac{1}{2x} - \frac{3x^3}{2} \end{cases}$

c) $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = \frac{4x^6+4}{3x^5} \\ \eta = \frac{10+x^5}{6x^2} \end{cases}$ **d)** $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = \frac{4x}{3} + \frac{64}{3x^5} \\ \eta = \frac{20}{3x^2} + \frac{x^4}{24} \end{cases}$

260. a) $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x + \frac{1}{\tan x}(1 + 4\cos^2 x) \\ \eta = -\frac{1+4\cos 2x}{2\sin x} \end{cases}$ **b)** $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x + \frac{1}{3\tan 3x}(1 + 9\cos^2 3x) \\ \eta = -\frac{1+9\cos 6x}{9\sin 3x} \end{cases}$

c) $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x - \frac{\tan x}{4}(4 + \sin^2 x) \\ \eta = \frac{\cos 2x-4}{2\cos x} \end{cases}$ **d)** $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x - \frac{1}{2\tan x}\left(1 + \frac{1}{\cos^4 x}\right) \\ \eta = \tan x + \frac{\cos^3 x}{2\tan x} + \frac{1}{\sin 2x} \end{cases}$

261. a) $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x - 2\left(1 + \frac{e^x}{4}\right) \\ \eta = 4e^{-\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$ **b)** $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x + 1 + e^{-2x} \\ \eta = e^x + 2e^{-x} \end{cases}$

c) $y = 2\ln x \Rightarrow y' = \frac{2}{x} \Rightarrow y'' = -\frac{2}{x^2}$

$1 + y'^2 = 1 + \frac{4}{x^2}$

$\xi = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) = x - \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{2}{x^2}}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = x + x + \frac{4}{x} = \underline{2x + \frac{4}{x}}$

$\eta = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2) = 2\ln x + \frac{1}{-\frac{2}{x^2}}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) = \underline{2\ln x - 2 - \frac{x^2}{2}}$

$\underline{f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = \frac{2x^2+4}{x} \\ \eta = \frac{4\ln x - x^2 - 4}{2} \end{cases}}$ **d)** $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x - \frac{x^2\ln x + 4(\ln x)^3}{x(1-\ln x)} \\ \eta = (\ln x)^2 + \frac{x^2+4(\ln x)^2}{2(1-\ln x)} \end{cases}$

262. a) $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x - \frac{x(a^2-x^2)}{a^2}\left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right) \\ \eta = \pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\left(b - \frac{a^2-x^2}{b} - \frac{bx^2}{a^2}\right) \end{cases}$

b) $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = x + \frac{x(x^2-a^2)}{a^2}\left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}\right) \\ \eta = \pm\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\left(b - \frac{x^2-a^2}{b} - \frac{bx^2}{a^2}\right) \end{cases}$

263. —

264. $f(x)\colon\ x \to \begin{cases} \xi = u \\ \eta = v \end{cases}$

265. —

266. a) 15,34 **c)** 3,75

b) $y = x^3 - 1 \Rightarrow y' = 3x^2$, mit $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ folgt:

$s = \int_{-2}^{1} \sqrt{1 + 9x^4}\,dx$. Das Integral wird mit der Simpsonregel berechnet.

$s \approx \frac{b-a}{6n}[f(x_0) + f(x_{2n}) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})) + 4(f(x_1) + f(x_3) +$
$+ \ldots + f(x_{2n-1}))]$

Mit $n = 10$ und $x_1 = a + i\left(\frac{b-a}{2n}\right)$ $(x_0 = a,\ x_{2n} = b)$ folgt:

$s \approx \frac{1}{20}[f(-2) + f(1) + 2(f(-1{,}7) + f(-1{,}4) + \cdots + f(0{,}7)) + 4(f(-1{,}85) + f(-1{,}55) +$
$+ \cdots + f(0{,}85))] = 10{,}18$ <u>Die Bogenlänge beträgt 10, 18.</u>

267. **a)** 63,1 **b)** 31,65 **c)** 7,65

268. 53,86 m

269. **a)** 2,48

b) $x^2 = 2y^3 \Rightarrow x = \sqrt{2}y^{\frac{3}{2}}, \quad x' = \frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt{2}y^{\frac{1}{2}}, \quad (x')^2 = \frac{9y}{2}$

$$\Rightarrow s = \int_0^1 \sqrt{1+(x')^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+\tfrac{9y}{2}}dy = \tfrac{2}{9}\int_0^1 \tfrac{9}{2}\left(1+\tfrac{9y}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \tfrac{2}{9}\cdot\tfrac{2}{3}\left[\left(1+\tfrac{9y}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{4}{27}\left(\left(1+\tfrac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right) = \underline{1,76}$$

270. 8r

271. 1511,8

272. **b)** $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

273. —

274. 4π

275. 3,71

276. 3,5754

277. 3,56

278. 162

279. 2,08

280. 4,78 FE

281. **a)** $y = 2x^2 \Rightarrow y' = 4x, \quad (y')^2 = 16x^2$

$$\Rightarrow A = 2\pi\int_1^3 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_1^3 2x^2\sqrt{1+16x^2}\,dx = 4\pi\int_1^3 x^2\sqrt{1+16x^2}\,dx =$$

$$= 4\pi\int_1^3 4x^2\sqrt{\tfrac{1}{16}+x^2}\,dx = = 16\pi\int_1^3 x^2\sqrt{\tfrac{1}{16}+x^2}\,dx$$

Dieses Integral kann man mit partieller Integration lösen, denn:

$$\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x\cdot x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{x}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \int \tfrac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \tfrac{x}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{a^2}{3}\int(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx - \tfrac{x^2}{3}\int(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Bringt man nun den letzten Summanden auf die linke Seite und dividiert durch $\frac{4}{3}$, so erhält man: $\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x}{4}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{4}\int(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

Mit $\int(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x}{2}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right) + C$ folgt:

$$\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{x}{4}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{a^2x}{8}(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{a^4}{8}\ln\left(x+(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right) + C$$

Somit folgt für die Mantelfläche:

$A = 16\pi \int_1^3 x^2 \left(\frac{1}{16} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} \, dx =$

$= 16\pi \left[\frac{x}{4} \left(\frac{1}{16} + x^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{128} \left(\frac{1}{16} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2048} \ln \left(x + \left(\frac{1}{16} + x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]_1^3 = 1011{,}6$

Die Mantelfläche beträgt 1011,6 FE.

b) 1259,8 FE **c)** 197,7 FE

282. 14,42 FE

283. 63,14 FE

284. **a)** 12,45 FE **b)** 5,97 FE **c)** 184,31 FE

285. 249,2 FE

286. **a)** 67,67 FE **b)** 89,001 FE

287. —

288. 203,04 FE

289. **a)** Durch Kegelstümpfe

b) $A = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$

d) $dA = \pi(y_k + y_{k+1})\sqrt{(dy)^2 + (dx)^2}$ (Mit $y_k = f(x_k), y_{k+1} = f(x_{k+1}), x_{k+1} - x_k = dx$)

290. **a)** $A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$ (Mit $t_1 = x^{-1}(x_1),\ t_2 = x^{-1}(x_2)$)

b) $A_x = 2 \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx$

291. **a)** $A = 105{,}28\ a^2$ **b)** 8,42 FE

292. **a)** $\frac{x^2}{(21{,}32)^2} - \frac{y^2}{(67{,}83)^2} = 1$ **b)** 14 397,8 m^2 **c)** 2447,62 m^3

293. **a)** $a = 25,\ b = 0{,}1$ **b)** 1566,73 m^2 **c)** 9400,39 Euro

294. S(2,8, 4,2)

295. **a)** $S\left(\frac{14}{3}, \frac{14}{9}\right)$ **b)** 28π VE

296. $y = 3x^2 \quad A = \int_1^3 y dx = \int_1^3 3x^2 dx = [x^3]_1^3 = 27 - 1 = 26$

$M_y = \int_1^3 xy dx = \int_1^3 3x^3 dx = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{243}{4} - \frac{3}{4} = \underline{60}$

$M_x = \frac{1}{2}\int_1^3 y^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^3 9x^4 dx = \left[\frac{9x^5}{10}\right]_1^3 = \frac{2187}{10} - \frac{9}{10} = \underline{217{,}8}$

$x_0 = \frac{M_y}{A} = \frac{60}{26} = 2{,}31, \quad y_0 = \frac{M_x}{A} = \frac{217{,}8}{26} = 8{,}38 \quad \Rightarrow \underline{S(2{,}31,\ 8{,}38)}$

297. $S\left(\frac{3x_1}{5}, 0\right)$

298. **a)** $S\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)$ **b)** $S\left(\frac{\pi}{2}-1,\ \frac{\pi}{8}\right)$

299. $S\left(\frac{4R}{3\pi},\ \frac{4R}{3\pi}\right)$

300. $S\left(0,\ \frac{2r}{3\alpha}\sin\alpha\right)$

301. S(0,78r, 0,78r)

302. S(33,95, 209,44)

303. **a)** S(1,296, 3,86) **b)** S(0, 3,45) **c)** S(2,48, 3,65)

304. **a)** S(1,47, 0,71) **b)** S(0,66, 5,385) **c)** S(1,82, 0,55)

305. **a)** S(0,83, 0,60)

306. **a)** S(1,41, 11,14) **b)** S(1,58, 0,36)

c) $y=\cosh x, \Rightarrow y'=\sinh x, \quad (y')^2=\sinh^2 x$

$$s=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx=\int_{-1}^{1}\cosh x\,dx=[\sinh x]_{-1}^{1}=$$
$$=2\sinh 1=2{,}35$$

Wegen der Symmetrie bezüglich der y-Achse folgt: $x_0=0$

$$y_0=\frac{1}{s}\int_{-1}^{1}y\sqrt{1+(y')^2}=\frac{1}{s}\int_{-1}^{1}\cosh^2 x\,dx=\frac{1}{s}\int_{-1}^{1}\frac{1+\cosh 2x}{2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{s}\left[\frac{x}{2}+\frac{\sinh 2x}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{s}\left(1+\frac{\sinh 2}{2}\right)=1{,}20\Rightarrow \underline{S(0,\ 1{,}20)}$$

307. S(3,99, 0,26)

308. $S\left(0,\frac{2R}{\pi}\right)$

309. S(1,35, 0,96)

310. S(0, 1,627)

311. **a)** $V=128\pi$ VE, $O=128\pi$ FE **b)** $V=81\pi$ VE, $O=108\pi$ FE

312. $O=4\pi^2 rR$

313. **a)** $V=60\pi$ VE, $O=112,11\pi$ FE

b) $V_y=2\pi x_0 A$

$$A=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|=\frac{1}{2}|7(1-8)+11(8+4)$$
$$+8(-4-1)|=21,5$$

$$x_0=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{7+11+8}{3}=\frac{26}{3}$$

$$V=2\pi x_0 A=2\pi\cdot\frac{26}{3}\cdot 21{,}5=372{,}67\pi\Rightarrow \underline{V=372{,}67\text{ VE}}$$

$$s=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}+\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$$

$$s=\sqrt{(11-7)^2+(1+4)^2}+\sqrt{(11-8)^2+(1-8)^2}+\sqrt{(7-8)^2+(-4-8)^2}=26{,}06$$

$$O=2\pi x_0 s=2\pi\cdot\frac{26}{3}\cdot 26{,}06=451{,}71\pi\Rightarrow \underline{O=451{,}71\pi\text{ FE}}$$

314. a) $x^2 + (y-4)^2 = 16$

Substitution: $y - 4 = \eta \Rightarrow y = \eta + 4 > 0 \qquad \eta > 0$

$x^2 + \eta^2 = 16 \quad \eta > 0$

$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \eta^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-4}^{4}(16 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \cdots = \frac{128}{3}$

$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{16\pi}{2} \qquad s = \pi r = 4\pi$

$\eta_0 = \frac{M_x}{A} = \frac{128\cdot 2}{3\cdot 16\pi} = \frac{16}{3\pi} \Rightarrow y_0 = \eta_0 + 4 = \frac{16}{3\pi} + 4$

$V = 2\pi y_0 A = 2\pi\left(\frac{16}{3\pi} + 4\right)\cdot\frac{16\pi}{2} = 286{,}4\pi \Rightarrow \underline{V = 286{,}4\pi\,\text{VE}}$

$O = 2\pi y_0 s = 2\pi\left(\frac{16}{3\pi} + 4\right)\cdot 4\pi = 143{,}19 \Rightarrow \underline{O = 143{,}19\pi\,\text{FE}}$

b) $402{,}29\pi$ VE, $160{,}91\pi$ FE

315. $V = 6750\pi^2\,\text{cm}^3$, $O = 1590{,}99\pi^2\,\text{cm}^2$

316. 566,01 kg

317. $V = 4{,}2\cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$, $m = 0{,}504\,\text{kg}$

318. $V = 436{,}8\,\text{cm}^3$, $m = 3{,}43\,\text{kg}$

319. $S\left(0,\ \frac{2b}{3},\ 0\right)$

320. a) $S\,(1{,}6565,\ 0,\ 0)$ **c)** $S(5,\ 0,\ 0)$

b) $x_0 = \frac{M_{yz}}{V_x} \qquad M_{yz} = \pi\int\limits_{x_1}^{x_2} xy^2\,dx = \pi\int\limits_{1}^{e} x(\ln x)^2 dx$

$\int x(\ln x)^2\,dx = \qquad$ mit $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = \frac{2}{x}\ln x\,dx$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{x}\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x\ln x\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}\,dx\right) = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$

$\Rightarrow M_{yz} = \pi\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \cdots = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$

$V_x = \pi\int\limits_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = \pi\int\limits_{1}^{e}(\ln x)^2\,dx$

$\int(\ln x)^2\,dx = \qquad$ mit $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = \frac{2}{x}\ln x\,dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$= x(\ln x)^2 - 2\int\ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int\ln x\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$= x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$

$\Rightarrow V_x = \pi\left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^e = \cdots = \pi(e - 2)$

$x_0 = \frac{M_{yz}}{V_x} = \frac{\pi(e^2-1)}{4\pi(e-2)} = 2{,}224 \Rightarrow \underline{S\ (2{,}224,\ 0,\ 0)}$

321. $S\left(\frac{3r}{8},\ 0,\ 0\right)$

322. **a)** $x = 1,\ 0{,}0729\pi\,\mathrm{m}^2$ **b)** $1{,}122\,\mathrm{m}^2$ **c)** $0{,}386\,\mathrm{m}^3,\ 5000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
d) $S(1{,}2,\ 0,\ 0)$

323. **a)** $H\left(\frac{4}{3},\ \frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ **b)** $\frac{64}{15}$ FE **c)** $S_1\left(\frac{12}{7},\ \frac{5}{8}\right)$
d) $\frac{16\pi}{3}$ VE **e)** $S_2\left(\frac{8}{5},\ 0,\ 0\right)$

324. $S\left(\frac{3}{8}\sqrt{r^2-\rho^2},\ 0,\ 0\right)$

325. $S(0,\ 5{,}149,\ 0)$

326. **a)** $64610\pi\,\mathrm{cm}^3$ **b)** $1734{,}96\,\mathrm{kg}$ **c)** $31283{,}9\,\mathrm{cm}^2$
d) $S(0,\ 27{,}82,\ 0)$ **e)** $0°$

327. —

328. $S(0{,}64,\ 0,\ 0)$

329. **a)** $S\left(0,\ \frac{h}{3},\ 0\right)$ **c)** $S(0,\ 12{,}84,\ 0)$

b) $x = y^2 \Rightarrow x' = 2y$

$$M_{xz} = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x y\sqrt{1+x'^2}\,dy = \int_0^2 2\pi y^2\cdot y\sqrt{1+4y^2}\,dy = 4\pi\int_0^2 y^3\sqrt{\tfrac{1}{4}+y^2}\,dy$$

Allgemein gilt: $\int y^3\sqrt{a^2+y^2}\,dy = \int y^2\cdot y(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy \qquad u = y^2 \Rightarrow du = 2y\,dy$

$$dv = y(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy \Rightarrow v = \frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\int y^3(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{y^2(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\int y(a^2+y^2)(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{y^2(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2a^2}{3}\int y(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy - \frac{2}{3}\int y^3(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$\frac{5}{3}\int y^3(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{y^2(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2a^2}{3}\cdot\frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\Rightarrow \int y^3(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = \left(y^2 - \frac{2a^2}{3}\right)\frac{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{5} + C$$

In diesem Beispiel ist $a = \frac{1}{2}$.

$$M_{xz} = 4\pi\int_0^2 y^3\left(\tfrac{1}{4}+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dy = 4\pi\left[\left(y^2-\tfrac{1}{6}\right)\frac{\left(\frac{1}{4}+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{5}\right]_0^2 = \cdots = 84{,}46$$

$$A_y = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x\sqrt{1+x'^2}\,dy = 2\pi\int_0^2 y^2\sqrt{1+4y^2}\,dy = 4\pi\int_0^2 y^2\sqrt{\tfrac{1}{4}+y^2}$$

Mit Hilfe von Aufgabe 281. erhält man:

$$A_y = 4\pi\left[\frac{y}{4}\left(\tfrac{1}{4}+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{y}{32}\left(\tfrac{1}{4}+y^2\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{128}\ln\left(y+\left(\tfrac{1}{4}+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^2 =$$

$$= \ldots = 53{,}22$$

$$y_0 = \frac{M_{xz}}{A_y} = \frac{84{,}46}{53{,}22} = 1{,}587 \Rightarrow \underline{S(0,\ 1{,}587,\ 0)}$$

330. $S\left(\frac{r}{2},\ 0,\ 0\right)$

331. $1{,}16331 \cdot 10^{14}$ J

332. $\frac{m}{2}(R^2 + r^2)$

333. $\frac{2mr^2}{5}$

334. **a)** $\frac{3\,m}{8}$ **b)** $\frac{5\,m}{72}$ **c)** $\frac{14\,m}{9}$

335. **a)** 0,191 m **b)** $\frac{10\,m}{7}$ **c)** 2,09 m

336. $J = \frac{7\,mr^2}{5}$

337. $J = m\left(z^2 + \frac{3r^2}{10}\right)$

338. —

339. **a)** $J = \frac{m\ell^2}{3}$ **b)** $J = \frac{m\ell^2 \sin^2\alpha}{3}$

340. **a)** $J_x = \frac{2\,mb^2}{5}$ **b)** $J_y = \frac{2\,ma^2}{5}$

341. **a)** 22669,78 kgm^2 **b)** $1118{,}71 \cdot 10^6$ J

c) 1 Tag 20 Stunden 23 Minuten 35 Sekunden

342. $3{,}65 \cdot 10^5$ J

343. $24{,}524\ \frac{\text{rad}}{\text{Sekunde}}$

344. **a)** 2810,6, 145,2

b) $y^2 = 2x^2 \Rightarrow$ symmetrisch bezüglich x- und y-Achse

$$y = \pm\sqrt{2}x$$

$$J_x = 2\left(\frac{1}{3}\int_0^8 2\sqrt{2}x^3 dx\right) = 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^8\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot 8^4\right) = \underline{1930{,}87}$$

$$J_y = 2\int_0^8 \sqrt{2}x^3 dx = 2\sqrt{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^8 = \underline{2896{,}31}$$

c) 0,89, 5,498 **d)** 14140, 2425,3

345. **a)** $\frac{4}{9}$, 5,87 **b)** 0,327, 0,507 **c)** 2,121, 0,718

d) 613,9, 198698,4

346. **a)** (1) 1,25, (2) 0,459 **b)** (1) 29958,4 (2) 13092 **c)** (1) 119,26, (2) 319,44

347. a) $x = r\sin\phi \Rightarrow dx = r\cos\phi \; d\phi$

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y^3 = (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$(1)\ J_x = \frac{4}{3}\int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - r^2\sin^2\phi)^{\frac{3}{2}}\ r\cos\phi d\phi =$$

$$= \frac{4r^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\phi d\phi$$

$$\int \cos^4\phi d\phi = \int \cos^3\phi\ \cos\phi d\phi = \cos^3\phi\sin\phi + 3\int \cos^2\phi\sin^2\phi d\phi =$$

$$= \cos^3\phi\sin\phi + 3\int \cos^2\phi(1 - \cos^2\phi)d\phi =$$

$$= \cos^3\phi\sin\phi + 3\int \cos^2\phi d\phi - 3\int \cos^4\phi d\phi$$

$$\Rightarrow\ 4\int \cos^4\phi d\phi = \cos^3\phi\sin\phi + \frac{3}{2}\int (1 + \cos 2\phi)d\phi$$

$$\int \cos^4\phi d\phi = \frac{1}{4}\left(\cos^3\phi\sin\phi + \frac{3}{2}\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\right)$$

$$J_x = \frac{4r^4}{3\cdot 4}\left[\cos^3\phi\sin\phi + \frac{3}{2}\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{r^4}{3}\left[0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) - 0 - \frac{3}{2}(0+0)\right] = \underline{\frac{\pi r^4}{4}}$$

$$(2)\ J_y = 4\int_0^r x^2(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = 4r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\cos^2\phi d\phi$$

$$\int \sin^2\phi\cos^2\phi d\phi = \int (1 - \cos^2\phi)\cos^2\phi d\phi = \int \cos^2\phi d\phi - \int \cos^4\phi d\phi =$$

$$= \int\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\phi}{2}\right)d\phi - \frac{1}{4}\left(\cos^3\phi\sin\phi + \frac{3}{2}\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} - \frac{1}{4}\left(\cos^3\phi\sin\phi + \frac{3}{2}\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\right)$$

$$J_y = 4r^4\left[\frac{\phi}{2} + \frac{\sin 2\phi}{4} - \frac{1}{4}\left(\cos^3\sin\phi + \frac{3}{2}\left(\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4r^4\left[\frac{\pi}{4} + 0 - \frac{1}{4}\left(0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)\right) - 0 - 0 + \frac{1}{4}\left(0 + \frac{3}{2}(0+0)\right)\right] = \underline{\frac{\pi r^4}{4}}$$

b) (1) 12,47, (2) 721,52 **c)** (1) 15,39, (2) 8,33

348. a) (1) 20000, (2) 50000 **b)** (1) 323231,7, (2) 104271,7

c) (1) 6730,7, (2) 47074,7 **d)** (1) 33440,4, (2) 172791,7

e) $(1)\ J_I = \frac{1}{3}\int_0^{40} 30^3 dx = \frac{27000}{3}\cdot 40 = 360000$

$$J_{II} = \frac{1}{3}\int_8^{32} 22^3 dx = \frac{10648}{3}\cdot 24 = 85184$$

$$J_1 = 2(J_I - J_{II}) = \underline{549632}$$

$$J_1 = 2(J_I - J_{II}) = \underline{549632}$$

$$(2)\ J_I = \frac{1}{3}\int_0^{40} 60^3 dx = \frac{216000}{3}\cdot 40 = 2880000$$

$$J_{II} = \frac{1}{3}\int_8^{32} 52^3 dx = \frac{140608}{3}\cdot 24 = 1124864$$

$$J_{III} = \frac{1}{3}\int_8^{32} 8^3 dx = \frac{512}{3}\cdot 24 = 4096$$

$$J_2 = J_I - J_{II} + J_{III} = 2880000 - 1124864 + 4096 = \underline{1759232}$$

f) (1) 31317,3, (2) 20725,3

349. a) $\frac{ab^3}{12}$ b) $\frac{a^3b^3}{12c^2}$

350. $\frac{a^3b^3}{6(a^2+b^2)}$

351. $\frac{5a^4\sqrt{3}}{16}$

352. a) 504 FE b) 23,91 c) 16070,4 d) 29296,6

353. a) $r\sqrt{2}$, $r\sqrt{2}$ b) $r\sqrt{3}$, r

354. a) $995{,}31\,\mathrm{dm}^3$ b) 1791,6 kg c) $J_1 = 296182820{,}7$, $J_2 = 294229695{,}7$

355. b) $T(0,\ 0)$, $H\left(\frac{4}{3},\ \frac{32}{9}\right)$ c) $W\left(\frac{2}{3},\ \frac{16}{9}\right)$, t: $y = 4x - \frac{8}{9}$

d) 4 FE e) $\left(\frac{6}{5},\ \frac{48}{35}\right)$ f) $\frac{384}{35}$, $\frac{32}{5}$ g) $\frac{384\pi}{35}$ VE

h) S(1,25, 0, 0)

356. a) 20,783 b) 4,39 c) 3,44 d) 16,45

357. a) 1,915 b) 10,64

c) $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\tfrac{9}{16}x}\,dx = \int_0^4 \left(1+\tfrac{9}{16}x\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{9}{16}}\left(1+\tfrac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \tfrac{32}{27}\left[\left(1+\tfrac{9\cdot 4}{16}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \underline{5{,}759}$$

d) 6,526

358. 15,72

359. 10,661

360. a) 106,63 FE

b) $y = -\frac{2}{3}x + 5 \Rightarrow y' = -\frac{2}{3}$

$$A_x = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\int_{-1}^{3}\left(-\tfrac{2}{3}x+5\right)\sqrt{1+\tfrac{4}{9}}\,dx =$$

$$= \tfrac{2\pi\sqrt{13}}{3}\int_{-1}^{3}\left(-\tfrac{2}{3}x+5\right)\,dx = \tfrac{2\pi\sqrt{13}}{3}\left[-\tfrac{x^2}{3}+5x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \tfrac{2\pi\sqrt{13}}{3}\left[-3+15-\left(-\tfrac{1}{3}-5\right)\right] = 130{,}89 \Rightarrow \underline{A_x = 130{,}89}$$

c) 6375,64 FE d) 12,60 FE

361. a) S(2,32, 1,36)

b) $y = kx + d$

$Q_1(0,\ 8) \Rightarrow 8 = k \cdot 0 + d \Rightarrow \underline{d = 8}$

$Q_2(5,\ 2) \Rightarrow 2 = 5k + d \Rightarrow 2 = 5k + 8 \Rightarrow -6 = 5k \Rightarrow \underline{k = -\frac{6}{5}}$

$y = -\frac{6}{5}x + 8$

$$A = \int_1^4 y\,dx = \int_1^4 \left(-\tfrac{6}{5}x + 8\right)\,dx = \left[-\tfrac{3x^2}{5} + 8x\right]_1^4 =$$
$$= \left(-\tfrac{48}{5} + 32 + \tfrac{3}{5} - 8\right) = 15$$

$$M_x = \tfrac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^4 \left(-\tfrac{6}{5}x + 8\right)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^4 \left(\tfrac{36}{25}x^2 - \tfrac{96}{5}x + 64\right)\,dx =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{12}{25}x^3 - \tfrac{48}{5}x^2 + 64x\right]_1^4 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{768}{25} - \tfrac{768}{5} + 256 - \tfrac{12}{25} + \tfrac{48}{5} - 64\right) =$$
$$= \tfrac{978}{25}$$

$$M_y = \int_{x_1}^{x_2} xy\,dx = \int_1^4 x\left(-\tfrac{6}{5}x + 8\right)\,dx = \int_1^4 \left(-\tfrac{6}{5}x^2 + 8x\right)\,dx =$$
$$= \left[-\tfrac{2x^3}{5} + 4x^2\right]_1^4 = \left(-\tfrac{128}{5} + 64 + \tfrac{2}{5} - 4\right) = \tfrac{174}{5}$$

$$x_0 = \tfrac{M_y}{A} = \tfrac{174}{5 \cdot 15} = \tfrac{174}{75} \qquad y_0 = \tfrac{M_x}{A} = \tfrac{978}{25 \cdot 15} = \tfrac{978}{375} \qquad \Rightarrow \underline{S\left(\tfrac{174}{75},\ \tfrac{978}{375}\right)}$$

362. $S\left(0,\ \frac{3b}{10}\right)$

363. S(3,097, 0)

364. a) S(0,06, 0,626) **b)** S(1,527, 0,674) **c)** S(0,458, 19,82)

365. a) $56{,}67\pi$ VE, $188{,}36\pi$ FE **b)** $373{,}33\pi$ VE, $269{,}43\pi$ FE

c) 56π VE, 126π FE **d)** 540π VE, $323{,}22\pi$ FE

366. a) S(0, 5,68, 0) **b)** S(0, 3, 0) **c)** $S(0,\ \frac{1}{8},\ 0)$ **d)** S(0, 2,89, 0)

367. a) (1) $J_I = \frac{1}{3}\int_0^{40} (x + 60)^3\,dx =$ mit $u = x + 60 \Rightarrow du = dx$

$$= \tfrac{1}{3}\int_{60}^{100} u^3\,du = \tfrac{1}{12}\left[u^4\right]_{60}^{100} = \tfrac{1}{12}(100^4 - 60^4) = \tfrac{21760000}{3}$$

$$J_{II} = \tfrac{1}{3}\int_{40}^{60} 100^4\,dx = \tfrac{10^6}{3} \cdot 20 = \tfrac{20000000}{3}$$

$$J_I = 2(J_I + J_{II}) = \tfrac{2}{3} \cdot 41760000 = \underline{27{,}84 \cdot 10^5}$$

$$(2)\ J_I = \frac{1}{3}\int_0^{60} 60^3\,dx = \frac{216000}{3}\cdot 60 = 4320000$$

$$J_{II} = \frac{1}{3}\int_{60}^{100} (-x+120)^3\,dx = \qquad \text{mit}\quad u=-x+120 \Rightarrow du=-dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{20}^{60}(-u)^3\,du = \frac{1}{12}\left[u^4\right]_{20}^{60} = \frac{1}{12}(60^4-20^4) = \frac{3200000}{3}$$

$$J_2 = 2(J_I + J_{II}) = \underline{10773333}$$

b) (1) 9366666,7, (2) 31416666,7 **c)** (1) 465473,3, (2) 3054213,3

d) (1) 2771337,6, (2) 923779,2

368. $S\left(\frac{3a(2r^2-a^2)}{4(3r^2-a^2)},\ 0,\ 0\right)$

369. a) $\frac{3}{8}$ m **b)** 1,577 m **c)** ∞

d) $y = x^3+2$

$$J_s = \frac{\pi\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2} y^4\,dx = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-1}^{8}(x^3+2)^4\,dx = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-1}^{8}\left[(x^3+2)^2\right]^2\,dx =$$

$$= \frac{\pi\rho}{2}\int_{-1}^{8}(x^6+4x^3+4)^2\,dx = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-1}^{8}(x^{12}+8x^9+24x^6+32x^3+16)\,dx =$$

$$= \frac{\pi\rho}{2}\left[\frac{x^{13}}{13}+\frac{8x^{10}}{10}+\frac{24x^7}{7}+\frac{32x^4}{4}+16x\right]_{-1}^{8} = \cdots = 2,15775\cdot 10^{10}\pi\rho$$

$$V = \pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx = \pi\int_{-1}^{8}(x^3+2)^2\,dx = \pi\int_{-1}^{8}(x^6+4x^3+4)\,dx = \pi\left[\frac{x^7}{7}+\frac{4x^4}{4}+4x\right]_{-1}^{8} =$$

$$= \cdots = 303724{,}2857\pi$$

$$m = \rho V \Rightarrow m = 303724{,}2857\pi\rho$$

$$J_s = \frac{2{,}15775\cdot 10^{10}\pi\, m}{303724{,}2857\pi} = \underline{702296{,}64\,m}$$

370. $\frac{\sqrt{\pi a}}{2}$

371. $W = \frac{CU^2}{2}$

372. —

373. a) und **f)** sind wahr

374. c)

375. c)

376. a) $y' = 2y + 3\sin x$, 1. Ordnung, 1. Grad, explizit

b) 1. Ordnung, 1. Grad, implizit

377. a) 1. Ordnung, 2. Grad, implizit **b)** 2. Ordnung, 1. Grad, implizit

378. a) 1. Ordnung, 1. Grad, implizit **b)** 3. Ordnung, 3. Grad, implizit

379. a) 1. Ordnung, 3. Grad, implizit **b)** 2. Ordnung, 2. Grad, implizit

380. a) 2. Ordnung, 2. Grad, implizit **b)** 1. Ordnung, 4. Grad, implizit

381. a) 4. Ordnung, 2. Grad, implizit **b)** 2. Ordnung, 2. Grad, explizit

382. a) 3. Ordnung, kein Grad, implizit **b)** 2. Ordnung, 2. Grad, implizit

383. $M = \{y = f(x) | y = kx + d,\ d = 0$ und k beliebig für alle $x \in \mathbb{R}\}$

384. —

385. a) $y = kx + 1$ **b)** $y = y'x + 1$

386. a) $y = k(x - 3) + 4$ **b)** $y = y'(x - 3) + 4$

387. $y = -\frac{y''}{2} \cdot x^2 + y'x$

388. $y = \frac{y'x}{2} + \frac{y'^2}{4x^2}$

389. a) $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ **b)** (1) x, y (2) r (3) —

c) $(x - r)^2 + y^2 = r^2$

$x - r + yy' = 0$

$r = x + yy'$

$(yy')^2 + y^2 = (x + yy')^2$

$y^2 = x^2 + 2xyy'$

$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

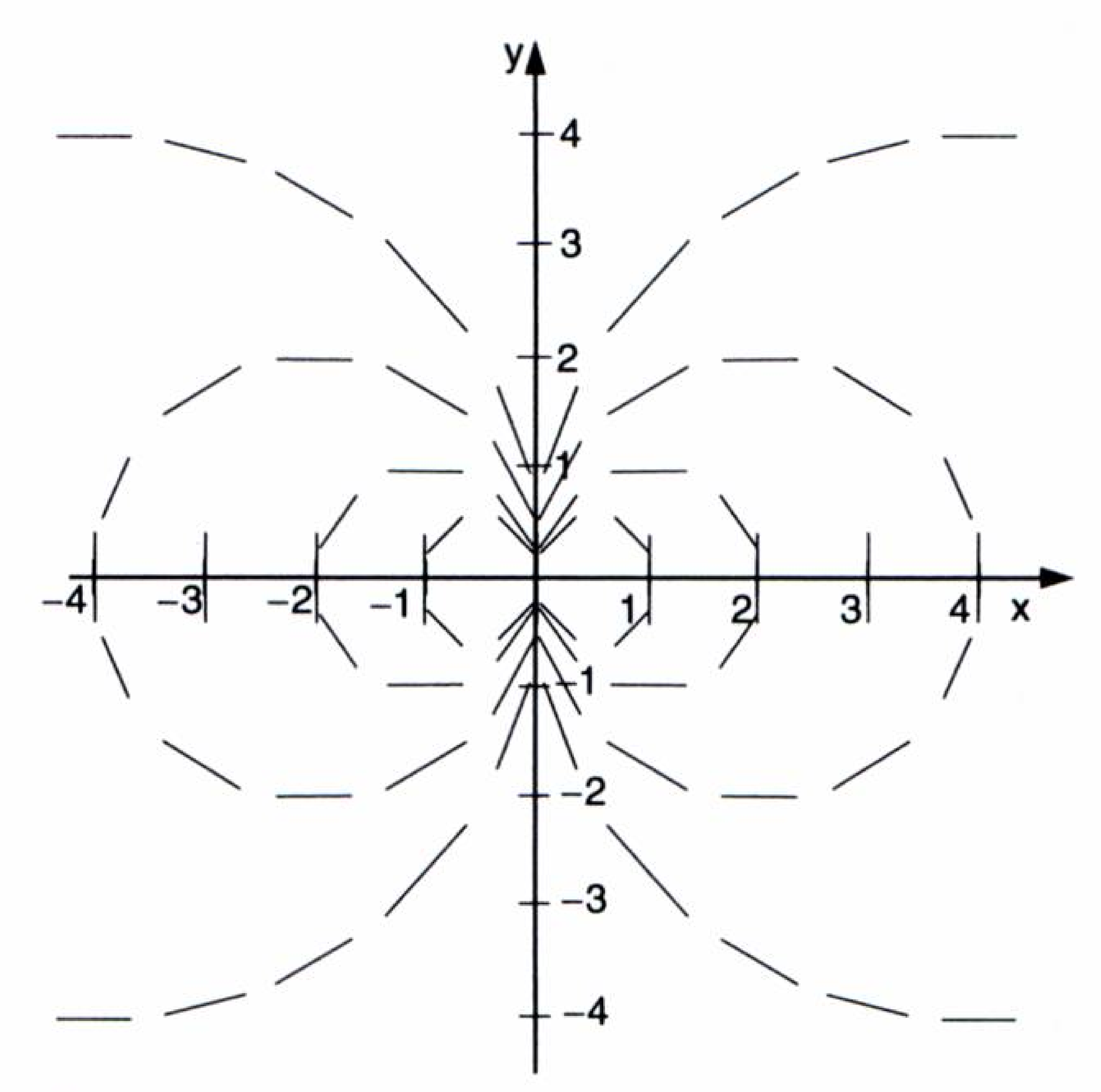
d) (1) DG ist 1. Ordnung

(2) DG ist für y' expliziter Weise

(3) Wir wählen für die Punkte der xy-Ebene jene, die ganzzahlige Koordinaten haben

(4) Eine Tabelle ist Überflüssig für die Werte y′

x/y	±1	±2	±3	±4
±1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$
±2	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{12}$	1
±3	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$	0	$\frac{7}{12}$
±4	$-\frac{5}{4}$	−1	$-\frac{7}{12}$	0



(5) Zu jedem Punkt ist ein Linienelement einzuzeichnen

390. a) $(x-m)^2+y^2=r^2$ **b)** (1) x, y (2) m (3) r

c) $y'=\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y}$ **d)** —

391. a) $(x-m)^2+(y-r)^2=r^2$ **b)** (1) x, y (2) m (3) r

c) $y'=\frac{\sqrt{y(2r-y)}}{y-r}$ **d)** —

392. —

393. —

394. a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **b)** $y'=\frac{xy}{x^2-9}$

c) Lineare DG 1. Ordnung **d)** —

e) — **f)** Hyperbelschar: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1$

g) — **h)** —

395. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \mid \cdot a^2b^2$

$$\left.\begin{aligned} x^2b^2+y^2a^2&=a^2b^2\\ e^2&=a^2-b^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x^2b^2+y^2(e^2+b^2)=b^2(e^2+b^2) \quad \Big|\frac{d}{dx}$$

$$xb^2+yy'(e^2+b^2)=0$$

$$b^2(x+yy')=-yy'e^2$$

$$b^2=\frac{-yy'e^2}{x+yy'}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{e^2+b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{e^2-\frac{yy'e^2}{x+yy'}}+\frac{y^2}{\frac{-yy'e^2}{x+yy'}}=1 \quad \mid\cdot e^2 \Rightarrow \frac{x^2(x+yy')}{x+yy'-yy'}-\frac{y^2(x+yy')}{yy'}=e^2$$

$$x(x+yy')-y\frac{(x+yy')}{y'}=e^2$$

$$(x+yy')(x-\frac{y}{y')}=e^2$$

396. $(x + yy')(x - \frac{y}{y'}) = e^2$

397. **a)** Sie sind identisch **b)** —

c) $(x + yy')(x - \frac{y}{y'}) = 16$ **d)** $y'_{1,2} = \pm 1$

e) Ellipse : $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24}$ Hyperbel : $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ **f)** —

398. **a)** $y = C + \ln x^2,\ y_P = 2 + \ln x^2$

b) DG $\frac{dv}{dt} = 2t$ ist 1. Ordnung, und ist expliziter Weise für $\dot{v}$.

Hier handelt es sich um eine Parabel-Funktionsschar

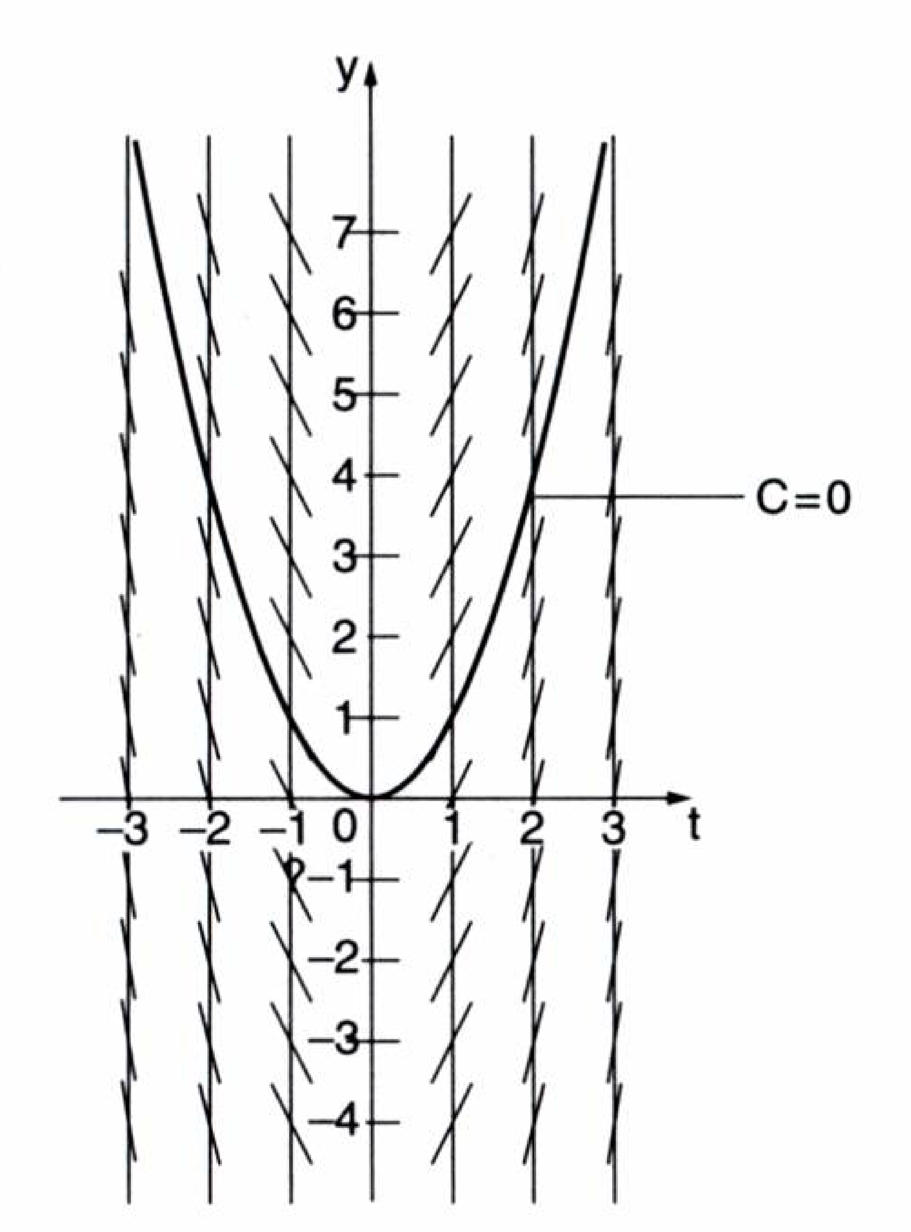
$\frac{dv}{dt} = 2t$

$dv = 2t\ dt$

$v(t) = t^2 + C$

$v(2) = 4 \Rightarrow 4 = 4 + C \Rightarrow C = 0$

$v_p = t^2$



399. **a)** $y = -2e^{-x}(x + 1) + C,\ y_P = -2e^{-x}(x + 1) + 3$

b) $y = -3\ln|\cos x| + C,\ y_P = -3\ln|\cos x| - 4$

400. **a)** $s = -\frac{4}{3}\cos 3t + C,\ s_P = -\frac{4}{3}\cos 3t + \frac{2}{3}$

b) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}x^{\frac{5}{3}} + C,\ y_P = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}x^{\frac{5}{3}} - 5$

401. **a)** $x(0) = 7,\ v(0) = 2$ **b)** $x(t) = -5t^2 + 2t + 7$ **c)** 1,4 s

402. **a)** $x(0) = 8,\ v(0) = 0,\ t = 1{,}3\,s$ **b)** $x(0) = 8,\ v(0) = 3\,m/s,\ t = 1{,}6\,s$ **c)** —

403. $x(t) = -5t^2 + 10t + 15$

404. Da das Randwertproblem dadurch überbestimmt wäre

405. $M_R(x) = -\frac{F}{2}(a - x),\ y''_R = \frac{F(a-x)}{2EI},\ y_R = -\frac{F}{12EI}x^3 + \frac{Fa}{4EI}x^2 + Ax + B$

406. $y(\frac{a}{2}) = -\frac{Fa^3}{48EI}$

407. **a)** $y_L = \frac{Fbx}{6EI(a+b)}[x^2 + a^2 + 2ab]$

$y_R = \frac{Fa}{6EI(a+b)}[-x^3 + 3(a + b)x^2 - (2(a + b)^2 + a^2)x + a^2(a + b)]$

b) Es kann nicht erwartet werden, dass die Stelle der maximalen Durchbiegung an der Stelle a auftritt.

c) $y_L(x_L)$ ist ein Minimum, $0 \leqslant x_L \leqslant a,\quad a \geqslant b$

$y_R(x_R)$ ist ein Maximum, $0 \leqslant x_R \leqslant a,\quad a \leqslant b$

408. **a)** $y = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3a)$ **b)** $(a, -\frac{Fa^3}{3EI})$

409. **a)** $y = -\frac{q}{24EI}(x^4 - 2ax^3 + a^3x)$ **b)** $(\frac{a}{2}, -\frac{5qa^4}{384I})$

410. **a)** $y = \frac{2}{x^2+C}$ **b)** $y = \frac{-3}{x^3+C}$

411. **a)** $y = \sqrt{\frac{2(x^3+C)}{3}}$ **b)** $y = \frac{C}{x+1} - 1$

412. Durch die Zusammenfassung wird die Funktionenmenge in keiner Weise eingeschränkt.

413. **a)** $y = \sqrt{2e^x + C}$ **b)** $y = C(x-2) + 3$

414. **a)** $y = \frac{Cx}{x+1}$ **b)** $y = \sqrt{Ce^{2x} - 3}$

415. **a)** $y = Cx^{\frac{2}{3}}$ **b)** $\frac{1}{3}y^3 - 16y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 4x + C$

416. **a)** Der Term $x^2 + y^2$ lässt sich nicht in die Gestalt $f(x)g(y)$ umformen

b) Der Term xy lässt sich zwar algebraisch trennen, jedoch ist die DG noch nich in expliziter Darstellung. Nach entsprechender Umformung erhalten wir:

$y' = \ln xy$

$y' = \ln x + \ln y$

Nun lassen sich x und y wiederum nicht trennen

417. **a)** Weil DG nicht von erster Ordnung ist **b)** x und y lassen sich nicht trennen

418. **a)** Weil DG nicht von erster Ordnung ist

b) Weil DG nicht explizit darstellbar für y' ist

419. **a)** x und y lassen sich nicht trennen **b)** x und y lassen sich nicht trennen

420. **a)** Aufstellen der DG der ersten Kurvenschar: **b)** —

$$\left.\begin{array}{r} y = Ce^x \\ y' = Ce^x \end{array}\right\} \Rightarrow y' = y$$

DG der orthogonalen Trajektorien:

$y' \to \frac{-1}{y'}$

$y' = y \to y' = \frac{-1}{y}$

Allgemeines Lösung der orthogonalen Trajektorien:

$$y' = \frac{-1}{y} \Rightarrow y\,dy = -dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x + \frac{C}{2}$$

$$y = \sqrt{C - 2x}$$

421. **a)** $y = \sqrt{\ln ax^2}$ **b)** —

422. **a)** $dK = rKdn$ **b)** $K = Ae^{rn}$

c) $K = K_0e^{rn}$ **d)** —

423. **a)** $u = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$ **b)** —

424. $u + \dot{u}RC = U_0$

425. Die DG lässt sich nicht in die Form $\dot{u} = f(u) \cdot g(t)$ bringen.

426. **a)** $i = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ **b)** $i(\infty) = \frac{U_0}{R}$

c) $i = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ **d)** $i(\infty) = 0$

427. **a)** $dV = Adh$ **b)** $dm = \rho Adh$ **c)** $dG = g\rho Adh$

d) $dP = q\rho dh$ **e)** $\rho = kp$ **f)** $\frac{dP}{dh} = -Cp$, Homogene DG

g) $P = Ae^{-Ch}$ **h)** $P = P_0e^{-Ch}$

428. **a)** $\dot{T} = \frac{\lambda A}{cms}(T_a - T)$ **b)** $\dot{g} = -kg$ mit $k = \frac{\lambda A}{cms}$

c) $T = T_a + Be^{-kt}$ **d)** $T = T_a - (T_a - T_0)e^{-kt}$

e) $T = 22(1 - e^{-0,19t})$ **f)** $t = 12,1\,s$

g) $\dot{T} = -\frac{\lambda A}{cms}(T - T_a)$ **h)** $T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$

429. **a)** $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ **b)** $\dot{N} = -\lambda N$ **c)** —

d) λ ist ein Proportionalitätsfaktor. Er heißt auch „Zerfallskonstante“

e) $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ **f)** $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,000428t}$, t in Jahren

430. **a)** $\frac{d\phi}{\phi} = -kdx$ **b)** $\phi = Ce^{-kx}$ **c)** $\phi = \phi_0e^{-kx}$

431. **a)** $\dot{x}(t) = -kx(t)$, homogene DG **b)** $x(t) = Ae^{-kt}$

c) $x(t) = ae^{-kt}$ **d)** $\dot{y}(t) = k(a - y(t))$, inhomogene DG

e) $y(t) = a - Be^{-kt}$ **f)** $y(t) = a(1 - e^{kt})$

432. **a)** $\dot{x}(t) = rx(t)$ **b)** $x(t) = Ae^{rt}$

c) $x(t) = x_0e^{rt}$ **d)** $\tau = \frac{\ln 2}{r}$

433. t und u lassen sich nicht trennen

434. $y = Ae^x - x - 1$

435. y_H ist das allgemeine Integral der verkürzten DG, also gilt : $\sum_{i=0}^{n} f_i(x)y_H^{(i)} = 0$

y_P ist das partikuläre Integral der vollständigen DG, also gilt : $\sum_{i=0}^{n} f_i(x)y_P^{(i)} = s(x)$ +

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x)y_H^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} f_i(x)y_P^{(i)} = s(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left[f_i(x)y_H^{(i)} + f_i(x)y_P^{(i)}\right] = s(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x) \left[y_H^{(i)} + y_P^{(i)}\right] = s(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x) \Big[\underbrace{y_H + y_P}_{=y}\Big]^{(i)} = s(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x)y^{(i)} = s(x)$$

y ist also Lösung der DG. Aber ist y auch ein allgemeines Integral?
y_P hat 0 freie Parameter, y_H hat n freie Parameter. Da y die Summe aus $y_H + y_P$ ist, hat es ebenfalls n freie Parameter. Daher ist, y das allgemeine Integral der vollständigen DG.

436. —

437. $u = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

438. $u = u_H + u_P$, u_H ist das allgemeine Integral der verkürzten DG, u_P ist ein partikuläres Integral

$u_H = A(t)e^{-\frac{t}{RC}}, u_P = U_0\frac{t-RC}{T}$

439. $u = u_H + u_P$, $U_H = A(t)e^{-\frac{t}{RC}}$, $u_P = \frac{U_0}{1+(\omega RC)^2}(\sin\omega t - \omega RC\cos\omega t)$

440. **a)** $y = Ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$

b) $y = A\cos x - 2\cos^2 x$

c) $y = C\sin x + x + A$

441. —

442. Allgemeine Darstellung der linearen inhomogenen DG mit variablen Koeffizienten:

$y' + yP(x) + Q(x) = 0$

(1) Allgemeines Integral y_H der verkürzten DG $y' + yP(x) = 0$ bestimmen:
Diese lineare DG ist von erster Ordnung.
Jetzt dürfen wir die Methode „Trennung der variablen“ anwenden:

$$y' + yP(x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -yP(x)$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|$$

$$y_H = Ce^{-\int P(x)dx}$$

(2) Um ein y_P zu finden, variieren wir die Konstante C in y_H, d.h. wir wandeln C in eine Funktion C(x) um: $y_P = C(x)e^{-\int P(x)dx}$
Das ist aber erst der Ansatz für y_P, denn die Funktion C(x) ist zunächst noch unbestimmt.

(3) Unser nächstes Ziel ist es, die Funktion C(x) zu bestimmen. Dazu setzen wir y_P und ihre Ableitung y'_P in die vollständige DG ein:

$$y'_P + y_P P(x) + Q(x) = 0$$

$$C'e^{-\int P(x)dx} - C \cdot P(x)e^{-\int P(x)dx} + Ce^{-\int P(x)dx}P(x) + Q(x) = 0$$

$$C'e^{-\int P(x)dx} + Q(x) = 0$$

$$C' = -Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

(4) Diese DG lösen wir durch unbestimmte Integration:
$C(x) = \int C'dx = -\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + (k)$
Wir haben im Ergebnis dieser unbestimmten Integration die sonst erforderliche Integrationskonstante k in Klammern hinzu gesetzt, da wir sie eigentlich auch weglassen dürfen. Ihre (formal korrekte) Mitnahme würde aber weder am partikulären Integral y_P noch am allgemeinen Integral y der DG irgend etwas ändern.

(5) Mit der nun bestimmten Funktion C(x) wird der Ansatz für y_P vervollständigt:

$$y_P = C(x)e^{-\int P(x)dx} = -e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Probe:

$$y_P = -\underbrace{e^{-\int P(x)dx}}_{u} \cdot \underbrace{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{v}$$

$$y_P' = -\Big[\underbrace{e^{-\int P(x)dx}(-P(x))}_{u'} \cdot \underbrace{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{v} + \underbrace{\underbrace{e^{-\int P(x)dx}}_{u} \cdot \underbrace{Q(x)e^{\int P(x)dx}}_{v'}}_{=Q(x)}\Big] =$$

$$= P(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx - Q(x)$$

$$y_P' + y_P P(x) + Q(x) = P(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx - Q(x) -$$
$$- e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \cdot P(x) + Q(x) = 0$$

443. —

444. —

445. —

446. —

447. $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} (A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}) = A_1 \lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda_1 t} + A_2 \lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda_2 t} = 0,$
da $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$ sind.

448. —

449. —

450. —

451. —

452. —

453. $\varphi = \arctan \frac{B_1}{B_2}$

454. —

455. —

456. $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

457. **a)** $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$ **b)** $y = C_1e^{6x} + C_2e^x$

458. **a)** $y = C_1 + C_2e^{4x}$ **b)** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$

459. a) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$ **b)** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{x}$

460. a) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$ **b)** $x(t) = (C_1t + C_2)e^{-2t}$

461. a) $x(t) = (C_1t + C_2)e^{-t}$ **b)** $y = (C_1x + C_2)e^{5x}$

462. a) $y = (C_1x + C_2)e^{4x}$ **b)** $x(t) = (C_1t + C_2)e^{-3t}$

463. a) $x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$ **b)** $x(t) = C_1 \cos \frac{\sqrt{6}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{6}}{2}t$

464. a) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ **b)** $x(t) = (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)e^{-t}$

465. a) $x(t) = (C_1 \cos \frac{\sqrt{31}}{4}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{31}}{4}t)e^{-\frac{3}{4}t}$ **b)** $y = (C_1 \cos \frac{2\sqrt{2}}{9}x + C_2 \sin \frac{2\sqrt{2}}{9}x)e^{\frac{4}{9}x}$

466. a) $y_P = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-5x})$ **b)** $x_P(t) = e^{2t}$

467. a) $y_P = 2(2 - x)e^{3x}$ **b)** $x_P(t) = -(\cos t + \sin t)$

468. a) $s_P(t) = \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t}$ **b)** $s_P(t) = \sin 3t$

469. a) $m\ddot{x} + ax = 0$, m ist Masse der gesamten Flüssigkeit

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$, ℓ ist die Länge des Flüssigkeitsfadens

470. $I\ddot{\varphi} + \rho\dot{\varphi} + D\varphi = 0$

471. —

472. $D = 61,7 \cdot 10^{-6}\mathrm{Nm/rad}$

473. a) $\ell\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$ **b)** —

474. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

475. a) $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$ **b)** $i = A \sin(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \varphi)$

476. —

477. $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$

478. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + x - 1$

479. $y = C_1e^{-\frac{x}{3}} \cos \frac{\sqrt{2}}{3}x + C_2e^{-\frac{x}{3}} \sin \frac{\sqrt{2}}{3}x + 5x - 9$

480. $A_2 = -\frac{1}{3}(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9})e^{-3x}$

481. a) $y = C_1e^{\frac{x}{3}} + C_2e^{-x} - 3x^2 - 14x - 47$

b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + \frac{1}{2}[\ln(e^{x} + 1) - x - e^{-x}]e^{4x} - \frac{1}{2}\ln(e^{x} + 1)e^{2x}$

c) $e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{x}{4}e^{-2x}$

482. —

483. **a)** $S(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$

$y_P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} \cdots + A_n$

Setzen wir S(x) und $y_P(x)$ in die DG ein:

$a\left[n(n-1)A_0x^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}\right] + b(nA_0x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}) +$

$+C(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$

Ein Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenz von x ergibt

$CA_0 = a_0$
$CA_1 + nbA_0 = a_1$
....
$CA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} = a_n$

Da $C \neq 0$ ist, lautet die Lösung der 1. Gleichung: $A_0 = \frac{a_0}{C}$, und mittels der restlichen Gleichungen werden nacheinander $A_1, \ldots, A_n$ bestimmt $\Rightarrow y_P(x)$ ist ein Polynom n-ten Grads.

b) Wir nehmen an, dass $y_P(x) = x(A_0x^n + \cdots + A_n)$ gilt.

Da $b \neq 0$ ist $\Rightarrow A_0 = \frac{a_0}{b(n+1)}$ und die restlichen Koeffizienten $A_1, \ldots, A_n$ werden genau so bestimmt $\Rightarrow y_P$ ist ein Polynom $(n+1)$-ten Grads.

c) $C = 0$ und $b = 0 \Rightarrow ay''(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$

Die DG ist zweimal zu integrieren $(a \neq 0)$

$y'(x) = \frac{a_0}{a}\int x^n dx + \frac{a_1}{a}\int x^{n-1}dx + \cdots + \frac{a_1}{a}\int dx + C_1 \Rightarrow$

$y'(x) = \frac{a_0}{a(n+1)}x^{n+1} + \frac{a_1}{an}x^n + \cdots + \frac{a_1}{a}x + C_1$

$y_P(x) = \frac{a_0}{a(n+1)}\int x^{n+1}dx + \frac{a_1}{an}\int x^n dx + \cdots + \frac{a_1}{a}\int xdx + C_1\int dx + C_2 \Rightarrow$

$y_P(x) = \frac{a_0}{a(n+1)(n+2)}x^{n+2} + \frac{a_1}{an(n+1)}x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2a}x^2 + C_1x + C_2 \Rightarrow$

$y_P(x)$ ist ein Polynom $(n+2)$-ten Grads.

484. —

485. —

486. —

487. —

488. —

489. —

490. **a)** $y_l = -x, \quad y_q = -x$ **b)** $y_l = 3x, \quad y_q = 3x$

c) $y_l = 1, \quad y_q = 1 - x^2$ **d)** $y_l = x, \quad y_q = x$

491. **a)** $y_l = 1 - x, \quad y_q = 1 - x + x^2$ **b)** $y_l = -1 - x, \quad y_q = -1 - x - x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot (-2\cos x \sin x)}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} \Rightarrow f''(0) = 1$

$\underline{y_l} = f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + 0 \cdot x = \underline{1}$

$\underline{y_q} = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 = \underline{1 + \frac{x^2}{2}}$

d) $y_l = 1 + nx, \quad y_q = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$

492. **a)** $y_l = x, \quad y_q = x - \frac{x^2}{2}$ **b)** $y_l = 1 + \frac{x}{2}, \quad y_q = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

c) $y_l = \sqrt[3]{2} + \frac{x}{3\sqrt[3]{4}}, \quad y_q = \sqrt[3]{2} + \frac{x}{3\sqrt[3]{4}} - \frac{x^2}{18\sqrt[3]{4}}$

d) $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$

$\underline{y_l} = f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + 1 \cdot x = \underline{1 + x}$

$\underline{y_q} = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \underline{1 + x + \frac{x^2}{2}}$

493. **a)** $y_l = 1 - 2x, \quad y_q = 1 - 2x + 2x^2$ **b)** $y_l = x, \quad y_q = x + x^2$

c) $y_l = x, \quad y_q = x$ **d)** $y_l = 1, \quad y_q = 1 + \frac{x^2}{18}$

494. $y_q = c + bx + ax^2$

495. —

496. —

497. **a)** $y_l = x, \quad y_q = x - \frac{x^2}{2}, \quad y_k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

b) $\Delta y_l < 10\%$ für $x \in [-0,2, \; 0,1]$

$\Delta y_q < 10\%$ für $x \in [-0,5, \; 0,5]$

$\Delta y_k < 10\%$ für $x \in [0,1, \; 0,7]$

498. $|q| < 1$

499. **a)** divergent

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[r]{n} = 0 + 1 + \sqrt[r]{2} + \sqrt[r]{3} + \cdots \qquad r \in \mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[r]{n} = \infty \Rightarrow$ Die Reihe ist <u>divergent</u>

c) divergent

d) divergent

500. —

501. —

502. k > 1

503. c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Wir vergleichen mit der konvergenten Reihe aus 11. ($k = \frac{5}{4}$) d.h.

mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$

Behauptung:

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt[4]{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

$$\sqrt[4]{n} < \sqrt{n} \qquad | \text{ Quadrieren}$$

$$\sqrt{n} < n \qquad \text{wahre Aussage}$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ist konvergent und hat eine Summe.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Wir vergleichen mit der konvergenten Reihe aus 12. c)

Behauptung:

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \qquad | \text{ Quadrieren}$$

$$n < n+1 \qquad \text{wahre Aussage}$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ ist konvergent und hat eine Summe.

504. —

505. —

506. a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

(1): $$|a_{n+1}| < |a_n|$$

$$\left|\frac{(-1)^{n+2}}{2(n+1)-1}\right| < \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right|$$

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1}$$

$$2n - 1 < 2n + 1$$

$$-1 < 1 \qquad \text{wahre Aussage}$$

(2): $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ ist konvergent.

b) konvergent **c)** konvergent **d)** konvergent

507. b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3\cdot 3^n}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ ist konvergent.

508. —

509. Herr Kinderlieb hat recht.

510. c) $n! > 2^{n-1}$ für $n > 2$

(1): $n = 3 \Rightarrow 3! > 2^{3-1}$

$6 > 4$ richtig

(2): Annahme: $n! > 2^{n-1}$ d.h. $n! > \frac{2^n}{2}$

$2 \cdot n! > 2^n$

(3): Behauptung: $(n+1)! > 2^{(n+1)-1}$

$(n+1) \cdot n! > 2^n$

Für $n > 2$ ist $n + 1 > 2$.

Da durch die Annahme $2 \cdot n! > 2^n$ ist, gilt auch $(n+1) \cdot n! > 2^n$.

$\Rightarrow$ Für $n > 2$ ist die Aussage $n! > 2^{n-1}$ immer richtig.

511. —

512. d) Zum Beispiel: Kriterium der konvergenten Majorante.

Eine erfüllte notwendige Bedingung, die nicht hinreichend ist, sagt nichts über die Konvergenz aus. Ebensowening können wir von einer nicht erfüllten hinreichenden Bedingung, die nicht notwendig ist, auf die Divergenz der Reihe schließen.

513. —

514. a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(3x)^{2n-1} \qquad x \in \left]-\infty, \infty\right[$

b) $f(x) = \sin\frac{x}{2} \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2^2}\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right) \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\frac{1}{8}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2^3}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow f'''(0) = -\frac{1}{8}$

$f^{IV}(x) = \frac{1}{16}\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2^4}\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) \Rightarrow f^{IV}(0) = 0$

....

$f^n(x) = \frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow f^n(0) = \frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$

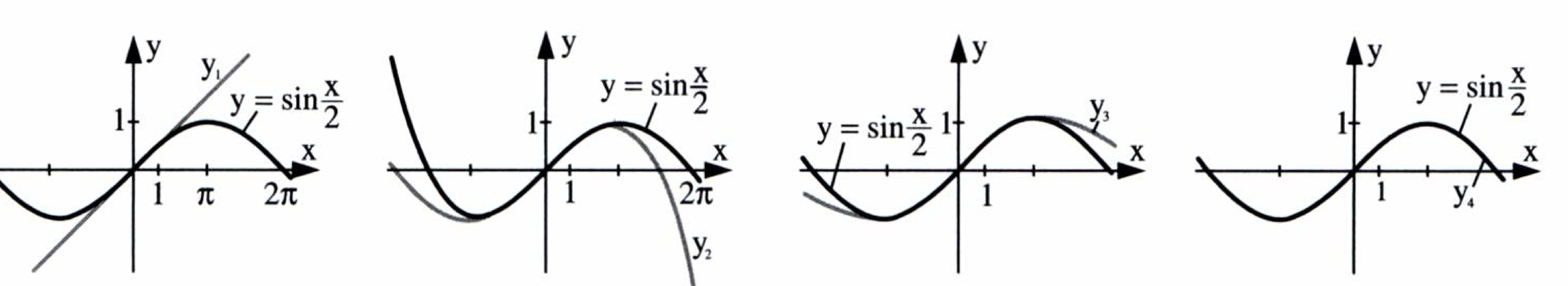
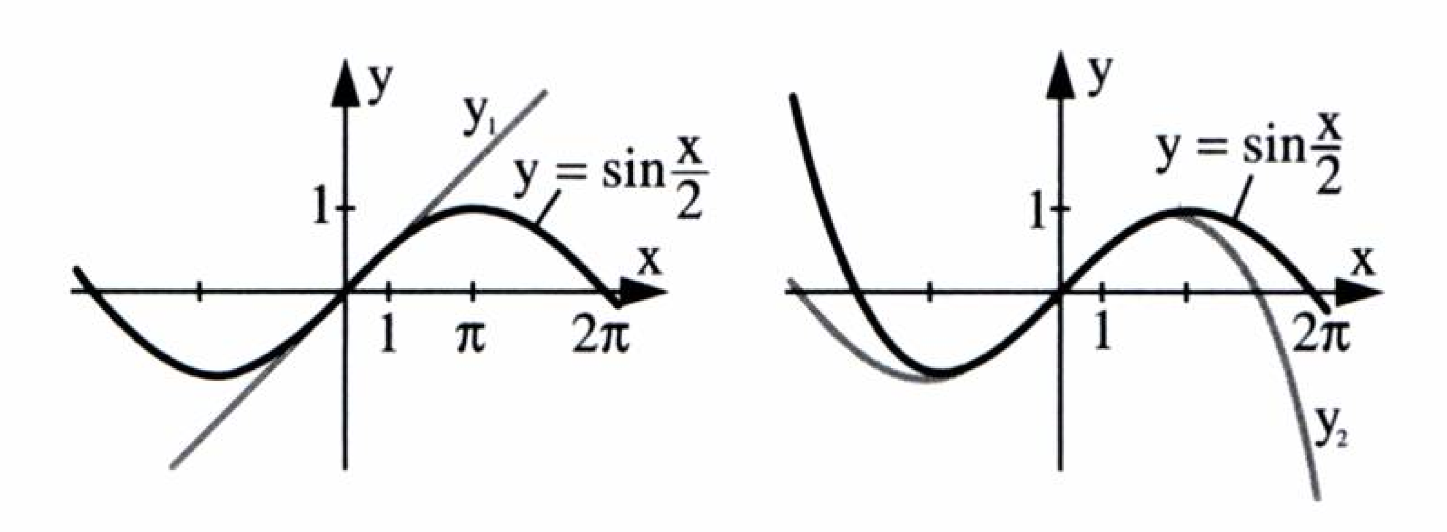
Wenn n gerade ist, ist $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$.

Wenn n ungerade ist, ist $\sin\frac{n\pi}{2}$ abwechselnd gleich ± 1.

$\underline{\sin\frac{x}{2}} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{3840} + \cdots = \underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}$

$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-1}}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!2^{2n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2n}{2^2} = \infty \Rightarrow \underline{x \in\,]-\infty,\infty[}$

$y_1 = \frac{x}{2},\quad y_2 = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48},\quad y_3 = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{3840},\quad y_4 = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{3840} - \frac{x^7}{645120}$

c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x \in\,]-\infty,\infty[$

d) $f(x) = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x}{4}\right)^{2n},\quad x \in\,]-\infty,\infty[$

515. a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x \in\,]-\infty,\infty[$

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!},\quad x \in\,]-\infty,\infty[$

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x \in\,]-\infty,\infty[$

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n},\quad x \in\,]-\infty,\infty[$

516. a) $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots,\quad x \in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

b) $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x \in [-1,1[$

c) $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad x \in\,]-1,1[$

d) $f(x) = \ln(x+1)^n = n\cdot\ln(x+1)$

Der Logarithmus ist nur für Argumente größer 0 definiert, also $x > -1$

$\Rightarrow \mathcal{D} = \{x | x > -1\}$

$f(x) = n\cdot\ln(x+1) \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = n\cdot\frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = n$

$f''(x) = -n\cdot\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -n$

$f'''(x) = n\cdot\frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2n$

$f^{IV}(x) = -n\cdot\frac{3\cdot 2}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{IV}(0) = -6n$

....

$f^k(x) = n \cdot \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(x+1)^k} \Rightarrow f^k(0) = n \cdot (-1)^{k+1}(k-1)!$

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$

$f(x) = 0 + nx - \frac{n}{2}x^2 + \frac{n}{3}x^3 + \cdots = n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}x^k = \underline{n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k}$

$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{n(-1)^{k+1}}{k}}{\frac{n(-1)^{k+2}}{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1 \Rightarrow \underline{r = 1}$

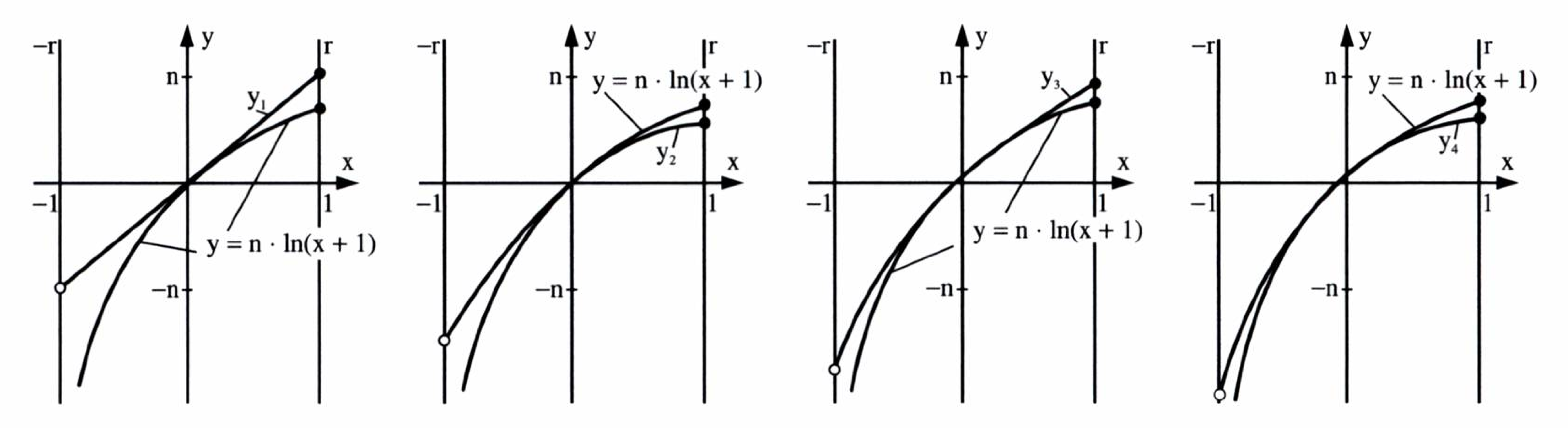
Randstellen : $x = -1 \quad -1 \notin \mathcal{D}$

$x = 1 \quad n \cdot \ln 2 = n\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$

Die (LEIBNIZ-)Reihe ist konvergent.

$\Rightarrow$ Konvergenzintervall: $\underline{x \in\,]-1, 1]}$

$y_1 = nx, \quad y_2 = n\left(x - \frac{x^2}{2}\right), \quad y_3 = n\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right), \quad y_4 = n\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$



517. a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}, \quad x \neq 0$

b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-3}, \quad x \neq 0$

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)^{2n}}{(2n-1)!}, \quad x \in\,]-\infty, \infty[$

d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+2}, \quad x \in\,]-1, 1[$

518. a) $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1!} = \underline{\frac{1}{2}}$

b) $\frac{429}{2^{13}}$

c) $-\frac{935}{3^{10}}$

d) $\frac{55}{6^4}$

519. a) $\frac{110}{7^4}$

b) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\binom{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right)}{3!} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}+4}{2}\right)}{3!} = -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+4)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3!} =$

$= -\frac{(3+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+4)}{48} = -\frac{3\sqrt{3}+12+6+8\sqrt{3}}{48} = \underline{-\frac{11\sqrt{3}+18}{48}}$

d) 1,66

520. a) $f(x) = 1 + \binom{q}{1}x + \binom{q}{2}x^2 + \cdots + \binom{q}{k}x^k + \cdots \qquad r = 1$

521. a) $f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots$

b) $f(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \cdots$

c) $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{16}x^4 + \cdots$

d) $f(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \cdots$

522. a) $f(a) = 1 + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9} + \frac{5}{81}a^3 - \cdots$

b) $f(\mu) = (\mu + 1)^{-\frac{1}{4}}$

$$f(\mu) = 1 + \binom{-\frac{1}{4}}{1}\mu + \binom{-\frac{1}{4}}{2}\mu^2 + \binom{-\frac{1}{4}}{3}\mu^3 + \cdots$$

$$f(\mu) = 1 + \frac{-\frac{1}{4}}{1!}\mu + \frac{-\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}-1)}{2!}\mu^2 + \frac{-\frac{1}{4}(-\frac{1}{4}-1)(-\frac{1}{4}-2)}{3!}\mu^3 + \cdots$$

$$\underline{f(\mu) = 1 - \frac{1}{4}\mu + \frac{5}{32}\mu^2 - \frac{15}{128}\mu^3 + \cdots}$$

c) $f(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda^4 + \frac{5}{32}\lambda^5 - \frac{15}{128}\lambda^6 + \cdots$

d) $f(\rho) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho} + \frac{3}{8} - \frac{5}{16}\rho + \cdots$

523. $f(x) = \frac{44}{15\pi}x - \frac{4}{\pi^3}x^3 + \frac{16}{15\pi^3}x^5$

524. $f(x) = 1 + x + 0{,}5x^2 + 0{,}1667x^3 + 0{,}4167x^4 + 0{,}0083x^5 + 0{,}00138x^6 +$
$+ 0{,}00022x^7 + 0{,}00003x^8$

525. —

526. —

527. a) 8,5

b) 0,58

c) $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ siehe 23. f)

$$\frac{e^{-x}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!}$$

$$\int_2^4 \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_2^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_2^4 x^{n-1}\,dx$$

$$n = 0 \Rightarrow \int x^{n-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$n \neq 0 \Rightarrow \int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n}$$

$$\int_2^4 \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \left[\frac{(-1)^0}{0!}\ln|x| + \frac{(-1)^1}{1!}\cdot\frac{x}{1} + \frac{(-1)^2}{2!}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4!}\cdot\frac{x^4}{4} + \cdots\right]_2^4 =$$

$$= \left[\ln|x| - \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \cdots\right]_2^4 =$$

$$= \ln 4 - \ln 2 - 4 + 2 + 4 - 1 - \frac{32}{9} + \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - \frac{1}{6} - \frac{128}{75} + \frac{4}{75} + \frac{128}{135} - \frac{2}{135} -$$

$$- \frac{1024}{2205} + \frac{8}{2205} + \frac{64}{315} - \frac{1}{1260} - \frac{2048}{25515} + \frac{4}{25515} + \frac{2048}{70875} - \cdots = \underline{0{,}045}$$

d) 0,38

528. $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad r = 1$

529. $R_8 < \frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} = 0{,}0000248$

530. a) 0,125 0,308, 30,8%

b) 0,015625 0,039, 3,9%

c) $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_5$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}$$

$R_{n+1} < \left|\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{n+1}\right|$

Mit $n = 4$, $x = \frac{1}{2}$ erhält man:

$R_5 < \left|\frac{(-1)^6\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5}\right| = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$

Der maximale absolute Fehler ist $\underline{6{,}25 \cdot 10^{-3}}$

Der maximale relative Fehler $= \frac{|a_{n+1}|}{\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{6{,}25\cdot 10^{-3}}{\ln \frac{3}{2}} = \underline{0{,}0154}$

Der maximale relative Fehler in Prozent $= 0{,}0154 \cdot 100 = \underline{1{,}54\%}$

d) $2{,}604 \cdot 10^{-3}$, $6{,}4 \cdot 10^{-3}$, $0{,}64\%$

531. **a)** $0 < x < 0{,}391$ **b)** $0 < x < 0{,}182$

c) $0 < x < 0{,}084$ **d)** $0 < x < 0{,}039$

532. —

533. $-0{,}08 < x < 0{,}09$

534. **a)** $2{,}86 \cdot 10^{-8}$ **b)** $1{,}31 \cdot 10^{-4}$

c) $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right)$

Abbruch nach dem 3. Glied:

$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)$

$R_6 < \left|\frac{2x^7}{7}\right|$

Mit $x = \frac{9}{10}$ erhält man: $R_6 < \left|\frac{2\cdot(0{,}9)^7}{7}\right| = 0{,}137$

Der maximale absolute Fehler beträgt $\underline{0{,}137}$.

d) $0{,}284$

535. —

536. $A = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx)$, $B = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx)$

537. **a)** $f(x) = \sin x + \sin 2x$

$f(-x) = \sin(-x) + \sin(-2x) = -\sin x - \sin 2x = -(\sin x + \sin 2x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$f(x)$ ist eine <u>ungerade</u> Funktion.

$f(x) = \sin x + \sin 2x = \sin x + 2 \sin x \cos x = \sin x(1 + 2\cos x)$

$f'(x) = \cos x + 2\cos 2x = \cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = \cos x + 4\cos^2 x - 2$

$f''(x) = -\sin x - 4\sin 2x = -\sin x - 8 \sin x \cos x = -\sin x(1 + 8\cos x)$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x(1 + 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow \underline{x = k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$

$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \underline{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$



Extremwerte:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{8}$

$\cos x = 0{,}593 \Rightarrow \underline{x = 2k\pi \pm 0{,}936} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -0{,}843 \Rightarrow \underline{x = 2k\pi \pm 2{,}574} \quad k \in \mathbb{Z}$

$f''(2k\pi + 0{,}936) = -\sin(2k\pi + 0{,}936) \cdot [1 + 8\cos(2k\pi + 0{,}936)] < 0$

$\Rightarrow x = 2k\pi + 0{,}936 \quad \underline{\text{Maximumwerte}} \Rightarrow f(2k\pi + 0{,}936) = 1{,}76$

$f''(2k\pi - 0{,}936) = -\sin(2k\pi - 0{,}936) \cdot [1 + 8\cos(2k\pi - 0{,}936)] > 0$

$\Rightarrow x = 2k\pi - 0{,}936 \quad \underline{\text{Minimumwerte}} \Rightarrow f(2k\pi - 0{,}936) = -1{,}76$

$f''(2k\pi + 2{,}574) = -\sin(2k\pi + 2{,}574) \cdot [1 + 8\cos(2k\pi + 2{,}574)] > 0$

$\Rightarrow x = 2k\pi + 2{,}574 \quad \underline{\text{Minimumwerte}} \Rightarrow f(2k\pi + 2{,}574) = -0{,}37$

$f''(2k\pi - 2{,}574) = -\sin(2k\pi - 2{,}574) \cdot [1 + 8\cos(2k\pi - 2{,}574)] < 0$

$\Rightarrow x = 2k\pi - 2{,}574 \quad \underline{\text{Maximumwerte}} \Rightarrow f(2k\pi - 2{,}574) = 0{,}37$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x(1 + 8\cos x) = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow \underline{x = k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$

$1 + 8\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{8} \Rightarrow \underline{x = 2k\pi \pm 1{,}696}$

$f(2k\pi + 1{,}696) = 0{,}74, \quad f(2k\pi - 1{,}696) = -0{,}74$

538. —

539. a) periodische **b)** immer **c)** immer **d)** nie
e) nicht immer **f)** jede **g)** nicht immer **h)** einem

540. d) $\underline{\sin 2x} = \sin(x + x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = \underline{2\sin x\cos x}$

541. c) $-\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x] = -\frac{1}{2}[\cos(mx + nx) - \cos(mx - nx)] =$

$= -\frac{1}{2}[\cos mx \cdot \cos nx) - \sin mx \cdot \sin nx -$

$- \cos mx \cdot \cos nx - \sin mx \cdot \sin nx] =$

$= -\frac{1}{2}(-2\sin mx \cdot \sin nx) = \underline{\sin mx \cdot \sin nx}$

542. a) $-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$ **b)** $\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$

c) $\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$

543. g) In der FOURIER-Reihe einer geraden Funktion kommen keine <u>Sinusfunktionen</u> vor.

544. —

545. b) Das Produkt einer ungeraden und einer geraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

f(x) ist eine ungerade Funktion und cos nx ist eine gerade Funktion.

$\Rightarrow$ f(x) · cos nx ist eine <u>ungerade</u> Funktion.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx = \int_{-a}^{0} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx + \int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx =$$
$$= -\int_{-a}^{0} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx + \int_{0}^{a} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx = \underline{\underline{0}}$$

546. —

547. b) Wenn n ungerade ist, ist $\cos n\pi = -1$.d.h. $n = (2k+1)$

$\Rightarrow \cos n\pi = \cos(2k+1)\pi = \cos(2k\pi + \pi) = \cos\pi = \underline{-1}$

Wenn n gerade ist, ist $\cos n\pi = 1$.d.h. $n = 2k$

$\Rightarrow \cos n\pi = \cos 2k\pi = \cos 0 = \underline{1}$

Allgemein gilt: $\underline{\cos n\pi = \pm 1}$

548. a) 0 **b)** 0 oder 2

549. —

550. a) $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin 6x + \cdots\right)$

b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$

551. a) $\left.\begin{array}{ll} f(x) = -a & -\pi < x < 0 \\ f(x) = a & 0 < x < \pi \end{array}\right\} \Rightarrow$ f(x) ist eine ungerade Funktion $\Rightarrow a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin nx\cdot dx = 2\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a\cdot\sin nx\cdot dx = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cdot dx =$$
$$= \frac{2a}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = -\frac{2a}{n\pi}[\cos nx]_0^{\pi} = -\frac{2a}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

n gerade $\Rightarrow \cos n\pi = 1 \Rightarrow b_n = 0$

n ungerade $\Rightarrow \cos n\pi = -1 \Rightarrow b_n = \frac{4a}{n\pi}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin nx\cdot dx = b_1\cdot\sin x + b_3\cdot\sin 3x + b_5\cdot\sin 5x + \cdots =$$
$$= \frac{4a}{\pi}\sin x + \frac{4a}{3\pi}\sin 3x + \frac{4a}{5\pi}\sin 5x + \cdots = \underline{= \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)}$$

b) $f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1+3}{1\cdot 3}\sin 2x + \frac{3+5}{3\cdot 5}\sin 4x + \frac{5+7}{5\cdot 7}\sin 6x + \cdots\right]$

552. a) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \cdots\right)$

b) $f(x) = \frac{36}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \frac{\sin 3\cdot\frac{\pi}{3}}{3^2}\sin 3x + \frac{\sin 5\cdot\frac{\pi}{3}}{5^2}\sin 5x + \frac{\sin 7\cdot\frac{\pi}{3}}{7^2}\sin 7x + \cdots\right) =$

$= \frac{36}{\pi^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{5^2}\sin 5x + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{7^2}\sin 7x - \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{11^2}\sin 11x + \cdots\right)$

553. a) $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x + \cdots\right]$

b) $f(x) = 2\left[\left(\frac{\pi^2}{1} - \frac{6}{1^3}\right)\sin x - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{6}{2^3}\right)\sin 2x + \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{6}{3^3}\right)\sin 3x - \cdots\right]$

554. a) $f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x + \cdots\right)$

b) $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x - \cdots\right)$

555. a) $f(x) = \frac{10}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$

b) $f(x) = \frac{2\pi^3}{3} + 4\left(\cos x - \frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{3^2}\cos 3x - \cdots\right)$

556. a) $f(x) = \frac{15}{4} + \frac{5}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right) + \frac{10}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$

b) $f(x) = \frac{5\pi^2}{12} - 4\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{4^2}\cos 4x + \right.$
$\left. + \frac{1}{6^2}\cos 6x + \cdots\right) + \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \cdots\right)$

557. a) $f(x) = \frac{2}{3\pi}x + \frac{2}{3} \quad -\pi < x < \frac{\pi}{2}$

$f(x) = -\frac{2}{\pi}x + 2 \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\underline{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3\pi}x + \frac{2}{3}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x + 2\right)dx\right] =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{1}{3\pi}x^2 + \frac{2}{3}x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{\pi} + 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3\pi}(-\pi)^2 - \frac{2}{3}(-\pi) - \frac{\pi^2}{\pi} + 2\pi + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3\pi}x + \frac{2}{3}\right)\cos nx\cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{2x}{\pi} + 2\right)dx\right] =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\cos nx\cdot dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\cos nx\cdot dx\right] =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left[\frac{(x+\pi)}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{(x-\pi)}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left[\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - 0 - \frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)\right] - \right.$
$\left. -\frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right]\right]$

$k \in \mathbb{N}$:

$n = 4k-3 \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left(\frac{3\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{\pi}{2n}\right)\right] = \frac{8}{3\pi^2 n^2}$

$n = 4k-1 \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{3\pi}{2n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right] = \frac{8}{3\pi^2 n^2}$

$n = 4k \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)\right] = 0$

$n = 4k-2 \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{16}{3\pi^2 n^2}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin x\cdot dx =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3\pi}x + \frac{2}{3}\right)\sin nx\cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\frac{2x}{\pi} + 2\right)\sin nx\cdot dx\right] =$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\sin x\cdot dx - \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\sin nx\cdot dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left[-\frac{(x+\pi)}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(x-\pi)}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{3\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + 0 - \frac{1}{n^2}\sin(-n\pi)\right) -\right.$$

$$\left. -\frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) - \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{3\pi n^2}\cdot(1+3)\cdot\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{3\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

n gerade $\Rightarrow b_n = 0$

n ungerade: $(k \in \mathbb{N})$

$n = 4k-3 \Rightarrow b_n = \frac{8}{3\pi^2 n^2}$

$n = 4k-1 \Rightarrow b_n = -\frac{8}{3\pi^2 n^2}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{3\pi^2}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) - \frac{16}{3\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{6^2}\cos 6x + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{10^2}\cos 10x + \cdots\right) + \frac{8}{3\pi^2}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \cdots\right)$$

b) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{20}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right) - \frac{96}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2x + \frac{1}{6^2}\cos 6x + \right.$
$\left. + \frac{1}{10^2}\cos 10x + \cdots\right) - \frac{12}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \cdots\right)$

558. $x(t) = B\sin\sqrt{5}t$

559. Zu <u>550.</u>: **a)** $\frac{\pi}{2}$ **b)** 0 Zu <u>557.</u>: **a)** 1 **b)** 5 bzw. 2

560. $\text{Re}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int a(\omega)\cdot\cos\omega t\cdot d\omega$, $\text{Im}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int a(\omega)\cdot\sin\omega t\cdot d\omega$

561. **a)** $-\frac{3}{s}$, $s>0$ **b)** $\frac{8}{s}$, $s>0$ **c)** $\frac{2}{s^2}$, $s>0$ **d)** $-\frac{4}{3s^2}$, $s>0$
e) $\frac{6+7s^2}{s^3}$, $s>0$ **f)** $\frac{48-7s^2}{s^4}$, $s>0$ **g)** $\frac{1}{s+2}$, $s>-2$ **h)** $\frac{21}{3s-2}$, $s>\frac{2}{3}$

562. —

563. —

564. —

565. **a)** $\frac{s+1}{s^2+1}$, $s>0$ **b)** $\frac{14}{s^2+4}$, $s>0$ **c)** $\frac{3s}{s^2+64}$, $s>0$ **d)** $\frac{1-2s}{s(s^2+4)}$, $s>0$

566. **a)** $\frac{2}{(s+3)^2+4}$, $s>-3$ **b)** $\frac{2}{(s+4)^2+1} + \frac{14}{(s+4)^2+4}$, $s>-4$
c) $\frac{2s(s^2-48)}{(s^2+16)^3}$, $s>0$ **d)** $\frac{2}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{49}{s-1}$, $s>1$

567. **a)** $\frac{a}{s^2-a^2}$, $s>|a|$ **b)** $\frac{s}{s^2-a^2}$, $s>|a|$

568. a) 1 **b)** 1

569. —

570. —

571. a) x **b)** $3x^2$ **c)** xe^x **d)** $8e^x - 4x^2 - 8x - 8$

572. —

573. a) e^{5x} **b)** x^7 **c)** $\frac{1}{5}\sin 5x$ **d)** $\frac{1}{7}\sinh 7x$

e) $\sinh 4x$ **f)** $-\frac{1}{8}(1+e^{8x})$ **g)** $e^{7x}\cos 4x$ **h)** $e^{-4x}\cos 3x$

574. a) $f(x) = \sin x$ **b)** $\frac{8}{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right) + \cos\sqrt{3}x + \sin\sqrt{3}x$

575. a) $x(t) = \frac{F}{D}(1-\cos\omega t)$ **b)** $x(t) = \frac{A}{2m\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t - t\cos\omega t\right)$

c) $x(t) = \frac{A}{m(\omega^2+b^2)}\left(e^{-bt} - \cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t\right)$

576. $x(t) = \frac{7}{8}\left(1 - e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t\right)$

577. $q(t) = \frac{100}{11}\left(1 - e^{-2t}\cos\sqrt{1{,}5}t - \frac{1}{\sqrt{1{,}5}}e^{-2t}\sin\sqrt{1{,}5}t\right)$

$I(t) = \frac{100}{11}\left(e^{-2t}\cos\sqrt{1{,}5}t - \frac{3{,}5}{\sqrt{1{,}5}}e^{-2t}\sin\sqrt{1{,}5}t\right)$

578. a) $q(t) = U_0C[1-(1+\delta t)e^{-\delta t}]$, $I(t) = \frac{U_0}{L}te^{-\delta t}$

b) $q(t) = U_0C\left[1 - e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega}\sinh\omega t + \cosh\omega t\right)\right]$

579. $q(t) = F\left[\frac{\beta}{\varphi_0}\sin\varphi_0 t - R\cos\varphi_0 t + \frac{RC\delta-\beta}{\omega}e^{-\delta t}\sin\omega t + RCe^{-\delta t}\cos\omega t\right]$

$I(t) = F\left[\beta\cos\varphi_0 t + RC\varphi_0\sin\varphi_0 t - \left(\frac{R-\delta\beta L}{\omega L}\right)e^{-\delta t}\sin\omega t + \beta e^{-\delta t}\cos\omega t\right]$

580. a) (1) $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$

(2) $a\circ e = e\circ a = a$ gilt

(3) $a\circ\bar{a} = \bar{a}\circ a = e$

b) Die verbleibenden vier Möglichkeiten lauten: KTF, KFT, FKT, FTK

c) —

581. a) Es ist ungenau zu sagen, dass man je zwei Elementen a und b der Menge ein anderes Element C zuordnet.

b) „Eine Verknüpfung ∘ in einer Menge ist eine Vorschrift, die jedem geordneten Paar (a, b) dieser Menge ein Element C dieser Menge zuordnet.“

582. In **a)**, **c)**, **d)**, **e)**, **f)** und **h)** werden keine algebraischen Strukturen gebildet, da jeweils die Vorschrift $a \circ b$ keine Verknüpfung ist.

b) bildet eine algenbraische Struktur, da die Vorschrift $a \circ b$ eine Verknüpfung ist, weil jedes $a, b \in \mathbb{Q}^+$, $a \circ b = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$

g) bildet eine algebraische Struktur, da die Vorschrift $a \circ b$ eine Verknüpfung in M ist.

583. **a)** (4) **b)** (2) **c)** Es gibt keine.

584. **a)** Nein. **b)** Nein. **c)** Ja. **d)** Nein. **e)** Nein. **f)** Nein. **g)** Nein. **h)** Nein.

585. **a)** Nein. **b)** Nein. **c)** Nein. **d)** Nein. **e)** Ja. **f)** Nein. **g)** Ja. **h)** Nein.

586. Ja.

587. **a)** Ja. **b)** Nein. **c)** Ja. **d)** Ja. **e)** Nein. **f)** Nein.

588. **a)** Nein. **b)** Nein. **c)** Ja. **d)** Ja. **e)** Nein. **f)** Nein.

589. $\begin{bmatrix} 11 & 5{,}50 \\ 9{,}50 & 6 \end{bmatrix}$

590.

Haushalt	Wohnung (€)	Kleidung (€)	Essen (€)	Bildung (€)	Unterhaltung (€)	Gesamtausgaben pro Jahr (€)	Gesamtausgaben pro Monat (€)
1	4200	840	3360	360	1200	9960	830
2	3600	960	2400	720	840	8520	710
3	3360	1440	1800	480	1440	8520	710

591. **a)** $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 28 & -23 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$

592. **a)** $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 8 & -17 \end{bmatrix}$

593. **a)** $\begin{bmatrix} -13 & 11 \\ -13 & -9 \\ -18 & 6 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -26 & 12 & 12 \\ -1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -1 & 13 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$

d) Die Anzahl der Spalten von Matrix B entspricht nicht der Anzahl der Zeilen von Matrix A.

594.

Kunde	Rechnungsendbeträge (€)
A	81,20
B	52,40

595.

Jahr	Meier (€)	Müller (€)	Novak (€)
2002	191,20	240,40	178,20
2003	188,25	236,90	176,20

596. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B^T = [1 \quad -2 \quad 4]$, $C^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

597. a) $\begin{bmatrix} 17 & 6 & -4 \\ 24 & 10 & -8 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -20 \\ 3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 6 & 10 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$

d) $(CB)^T = B^T C^T$

598. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **b)** $L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $(F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

599. —

600. —

601. —

602. —

603. $x = -1, \quad y = 4$

604. $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 5$

605. —

606. a) 14 **b)** −38 **c)** 0 **d)** 4

607. a) $x = 1, \quad y = -1$ **b)** nicht eindeutig lösbar **c)** nicht eindeutig lösbar

d) nicht eindeutig lösbar

608. a)

Kunde	Gesamtsummen der Kosten (€)
A	4530
B	8010
C	6605

b)

Ware	Kosten (€)
1	30
2	60
3	28

609. ① $3x + 4y - z \leqslant 5$ 1. Zeile ist Pivotzeile, 2. Spalte ist Pivotspalte,

② $2x + y + z \leqslant 4$ Zahl 4 ist Pivotelement.

③ $u = 2x + 3y + z$

610. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

611. $x = 0, \quad y = 9, \quad z = 1, \quad M = 31$

612. ① $80x + 100y + 110z \leqslant 5000$, $x \mathrel{\hat{=}} \text{Opel}$, $y \mathrel{\hat{=}} \text{CV}$, $z \mathrel{\hat{=}} \text{MITSU}$

② $200x + 180y + 220z \leqslant 10\,000$

③ $150x + 200y + 250z \leqslant 8000$

$U = 1000x + 1200y + 8000z$

MITSU wird nicht erzeugt, Opel wird am häufigsten erzeugt.

In der Motorherstellungsabteilung beibt ein „Schlupf" in der Höhe ≈ 785

613. $A = 0, \quad B = 18, \quad C = 12{,}5, \quad D = 13{,}5, \quad Z = 1\,515$ Euro

A wird nicht produziert

614. A = 6 kg, B = 0 kg, C = 3 kg, B wird nicht produziert

615. —

616. **a)** g und h schneiden einander in $(2, -4)$ **b)** g und h sind parallel

c) g und h sind identisch **d)** g und h schneiden einander in $\left(\frac{11}{7}, \frac{24}{7}\right)$

617. $U(2, -1), \quad r = 10$

618. $H(-1, 2)$

619. $I(5, 3), \quad \rho = 2{,}5$

620. $S_1(4, 9), \quad S_2 = \left(-\frac{44}{9}, -\frac{35}{9}\right)$

621. $S_1(9, 6), \quad S_2 = (4, -4)$

622. $S_1(6, 3), \quad S_2 = (-3, 0)$

623. $S(6, 2)$

624. **a)** 0,35 **b)** 0,68 **c)** 0,65

625. Es ist wahrscheinlicher, dass Britta 4 von 5 Spielen gewinnt.

626. 0,09

627. $k = 6$

628. $k = 7$

629. 0,283

630. 0,895

631. $k = 3$

632. $k = 1$

633. 0,02275

634. 0,6 %

635. 0,02275

636. 0,6 %

637. $y = 0{,}89x + 7{,}81$, Corr $= 0{,}94$, $R^2 = 0{,}89$: x-und y-Werte sind sehr gut korreliert

638. $y = 7{,}88x - 1361{,}54$, Corr $= 0{,}91$, $R^2 = 0{,}83$: x-und y-Werte sind sehr gut korreliert. Es handelt sich allerdings um einen „Scheinzusammenhang".

639. $T(2,\ 10{,}7)$, $H(6,\ 0)$, $W(4,\ 5{,}33)$, $y = -4x + \frac{64}{3}$

640. $H(0,0)$, $T(4, 2{,}67)$, kein Wendepunkt

641. $T_1\left(\frac{-\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$, $T_2\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{4}}\right)$, $H\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$, $W_1\left(-\frac{\pi}{2}, -e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$, $W_2\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$, $W_3\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)$, $y_1 = e^{\frac{\pi}{2}}x + e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\pi}$, $y_2 = -e^{-\frac{3\pi}{2}}x + e^{3\pi} - e^{\frac{3\pi}{2}}$

642. $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

643. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

644. **a)** — **b)** $P(-1,\ 8)$, 0,5 **c)** 14,6431 **d)** 68π

645. **a)** — **b)** $P(9{,}19239,\ 9{,}19239)$, -1 **c)** 26,2626

646. **a)** — **b)** 1,25 **c)** 8,70067

647. **a)** $\sqrt{y} = \frac{x^2 \ln x}{2} + Cx^2$ **b)** $\sqrt{y} = \frac{x^2 \ln x}{2}$

648. **a)** $y = C_1 e^{-\frac{x}{6}} - 8x + C_2 + 48$ **b)** $y = -54e^{-\frac{x}{6}} - 8x + 54$

649. 1

650. Diese Reihe ist konvergent. **a)** 1,34725 **b)** 1,34725

651. mit dem 4. Grad: $\frac{-x^4}{64} + \frac{x^2}{4} + 2$, mit dem 6. Grad: $\frac{x^6}{512} - \frac{x^4}{64} + \frac{x^2}{4} + 2$

652. $\frac{2(25\pi^2-6)}{1125}\sin 5x - \frac{8\pi^2-3}{144}\sin 4x + 2\frac{(3\pi^2-2)}{81}\sin 3x - \frac{(2\pi^2-3)}{18}\sin 2x + \frac{2(\pi^2-6)}{9}\sin x$

k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)
0,01	0,50399	0,51	0,69497	1,01	0,84375	1,51	0,93448
0,02	0,50798	0,52	0,69847	1,02	0,84614	1,52	0,93574
0,03	0,51197	0,53	0,70194	1,03	0,84849	1,53	0,93699
0,04	0,51595	0,54	0,70540	1,04	0,85083	1,54	0,93822
0,05	0,51994	0,55	0,70884	1,05	0,85314	1,55	0,93943
0,06	0,52392	0,56	0,71226	1,06	0,85543	1,56	0,94062
0,07	0,52790	0,57	0,71566	1,07	0,85769	1,57	0,94179
0,08	0,53188	0,58	0,71904	1,08	0,85993	1,58	0,94295
0,09	0,53586	0,59	0,72240	1,09	0,86214	1,59	0,94408
0,10	0,53983	0,60	0,72575	1,10	0,86433	1,60	0,94520
0,11	0,54380	0,61	0,72907	1,11	0,86650	1,61	0,94630
0,12	0,54776	0,62	0,73237	1,12	0,86864	1,62	0,94738
0,13	0,55172	0,63	0,73565	1,13	0,87076	1,63	0,94845
0,14	0,55567	0,64	0,73891	1,14	0,87286	1,64	0,94950
0,15	0,55962	0,65	0,74215	1,15	0,87493	1,65	0,95053
0,16	0,56356	0,66	0,74537	1,16	0,87698	1,66	0,95154
0,17	0,56749	0,67	0,74857	1,17	0,87900	1,67	0,95254
0,18	0,57142	0,68	0,75175	1,18	0,88100	1,68	0,95352
0,19	0,57535	0,69	0,75490	1,19	0,88298	1,69	0,95449
0,20	0,57926	0,70	0,75804	1,20	0,88493	1,70	0,95543
0,21	0,58317	0,71	0,76115	1,21	0,88686	1,71	0,95637
0,22	0,58706	0,72	0,76424	1,22	0,88877	1,72	0,95728
0,23	0,59095	0,73	0,76730	1,23	0,89065	1,73	0,95818
0,24	0,59483	0,74	0,77035	1,24	0,89251	1,74	0,95907
0,25	0,59871	0,75	0,77337	1,25	0,89435	1,75	0,95994
0,26	0,60257	0,76	0,77637	1,26	0,89617	1,76	0,96080
0,27	0,60642	0,77	0,77935	1,27	0,89796	1,77	0,96164
0,28	0,61026	0,78	0,78230	1,28	0,89973	1,78	0,96246
0,29	0,61409	0,79	0,78524	1,29	0,90147	1,79	0,96327
0,30	0,61791	0,80	0,78814	1,30	0,90320	1,80	0,96407
0,31	0,62172	0,81	0,79103	1,31	0,90490	1,81	0,96485
0,32	0,62552	0,82	0,79389	1,32	0,90658	1,82	0,96562
0,33	0,62930	0,83	0,79673	1,33	0,90824	1,83	0,96638
0,34	0,63307	0,84	0,79955	1,34	0,90988	1,84	0,96712
0,35	0,63683	0,85	0,80234	1,35	0,91149	1,85	0,96784
0,36	0,64058	0,86	0,80511	1,36	0,91309	1,86	0,96856
0,37	0,64431	0,87	0,80785	1,37	0,91466	1,87	0,96926
0,38	0,64803	0,88	0,81057	1,38	0,91621	1,88	0,96995
0,39	0,65173	0,89	0,81327	1,39	0,91774	1,89	0,97062
0,40	0,65542	0,90	0,81594	1,40	0,91924	1,90	0,97128
0,41	0,65910	0,91	0,81859	1,41	0,92073	1,91	0,97193
0,42	0,66276	0,92	0,82121	1,42	0,92220	1,92	0,97257
0,43	0,66640	0,93	0,82381	1,43	0,92364	1,93	0,97320
0,44	0,67003	0,94	0,82639	1,44	0,92507	1,94	0,97381
0,45	0,67364	0,95	0,82894	1,45	0,92647	1,95	0,97441
0,46	0,67724	0,96	0,83147	1,46	0,92785	1,96	0,97500
0,47	0,68082	0,97	0,83398	1,47	0,92922	1,97	0,97558
0,48	0,68439	0,98	0,83646	1,48	0,93056	1,98	0,97615
0,49	0,68793	0,99	0,83891	1,49	0,93189	1,99	0,97670
0,50	0,69146	1,00	0,84134	1,50	0,93319	2,00	0,97725

k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)	k	F(k)
2,01	0,97778	2,51	0,99396	3,01	0,99869	3,51	0,99978
2,02	0,97831	2,52	0,99413	3,02	0,99874	3,52	0,99978
2,03	0,97882	2,53	0,99430	3,03	0,99878	3,53	0,99979
2,04	0,97932	2,54	0,99446	3,04	0,99882	3,54	0,99980
2,05	0,97982	2,55	0,99461	3,05	0,99886	3,55	0,99981
2,06	0,98030	2,56	0,99477	3,06	0,99889	3,56	0,99981
2,07	0,98077	2,57	0,99492	3,07	0,99893	3,57	0,99982
2,08	0,98124	2,58	0,99506	3,08	0,99896	3,58	0,99983
2,09	0,98169	2,59	0,99520	3,09	0,99900	3,59	0,99983
2,10	0,98214	2,60	0,99534	3,10	0,99903	3,60	0,99984
2,11	0,98257	2,61	0,99547	3,11	0,99906	3,61	0,99985
2,12	0,98300	2,62	0,99560	3,12	0,99910	3,62	0,99985
2,13	0,98341	2,63	0,99573	3,13	0,99913	3,63	0,99986
2,14	0,98382	2,64	0,99585	3,14	0,99916	3,64	0,99986
2,15	0,98422	2,65	0,99598	3,15	0,99918	3,65	0,99987
2,16	0,98461	2,66	0,99609	3,16	0,99921	3,66	0,99987
2,17	0,98500	2,67	0,99621	3,17	0,99924	3,67	0,99988
2,18	0,98537	2,68	0,99632	3,18	0,99926	3,68	0,99988
2,19	0,98574	2,69	0,99643	3,19	0,99929	3,69	0,99989
2,20	0,98610	2,70	0,99653	3,20	0,99931	3,70	0,99989
2,21	0,98645	2,71	0,99664	3,21	0,99934	3,71	0,99990
2,22	0,98679	2,72	0,99674	3,22	0,99936	3,72	0,99990
2,23	0,98713	2,73	0,99683	3,23	0,99938	3,73	0,99990
2,24	0,98745	2,74	0,99693	3,24	0,99940	3,74	0,99991
2,25	0,98778	2,75	0,99702	3,25	0,99942	3,75	0,99991
2,26	0,98809	2,76	0,99711	3,26	0,99944	3,76	0,99992
2,27	0,98840	2,77	0,99720	3,27	0,99946	3,77	0,99992
2,28	0,98870	2,78	0,99728	3,28	0,99948	3,78	0,99992
2,29	0,98899	2,79	0,99736	3,29	0,99950	3,79	0,99992
2,30	0,98928	2,80	0,99744	3,30	0,99952	3,80	0,99993
2,31	0,98956	2,81	0,99752	3,31	0,99953	3,81	0,99993
2,32	0,98983	2,82	0,99760	3,32	0,99955	3,82	0,99993
2,33	0,99010	2,83	0,99767	3,33	0,99957	3,83	0,99994
2,34	0,99036	2,84	0,99774	3,34	0,99958	3,84	0,99994
2,35	0,99061	2,85	0,99781	3,35	0,99960	3,85	0,99994
2,36	0,99086	2,86	0,99788	3,36	0,99961	3,86	0,99994
2,37	0,99111	2,87	0,99795	3,37	0,99962	3,87	0,99995
2,38	0,99134	2,88	0,99801	3,38	0,99964	3,88	0,99995
2,39	0,99158	2,89	0,99807	3,39	0,99965	3,89	0,99995
2,40	0,99180	2,90	0,99813	3,40	0,99966	3,90	0,99995
2,41	0,99202	2,91	0,99819	3,41	0,99968	3,91	0,99995
2,42	0,99224	2,92	0,99825	3,42	0,99969	3,92	0,99996
2,43	0,99245	2,93	0,99831	3,43	0,99970	3,93	0,99996
2,44	0,99266	2,94	0,99836	3,44	0,99971	2,94	0,99996
2,45	0,99286	2,95	0,99841	3,45	0,99972	3,95	0,99996
2,46	0,99305	2,96	0,99846	3,46	0,99973	3,96	0,99996
2,47	0,99324	2,97	0,99851	3,47	0,99974	3,97	0,99996
2,48	0,99343	2,98	0,99856	3,48	0,99975	3,98	0,99997
2,49	0,99361	2,99	0,99861	3,49	0,99976	3,99	0,99997
2,50	0,99379	3,00	0,99865	3,50	0,99977	4,00	0,99997